Śląski Konkurs Matematyczny
im. Krystyny Skórnik

XXI Śląski Konkurs Matematyczny

16 stycznia 2024 r. **zawody rejonowe** czas: 10:00 – 12:00

1. [6 pkt.] Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x+\sqrt[4]{x}=y+\sqrt[4]{y} \\ x^2+xy+y^2=1200. \end{cases}$$

2. [6 pkt.] Michał wybierał takie liczby całkowite a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, że

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2024.$$

Następnie dla wybranych przez siebie liczb obliczał reszty z dzielenia

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots+a_n^3$$

przez 6. Wyznacz wszystkie możliwe reszty jakie mógł otrzymać Michał.

3. [6 pkt.] Liczby $2a-b$, $2b-c$, $2c-d$ i $2d-a$ są dodatnie. Wykaż, że każda z liczb a, b, c i d jest dodatnia.

4. [6 pkt.] Dany jest romb $ABCD$, w którym kąt przy jego wierzchołku A jest ostry i większy od $60°$. Wewnątrz tego rombu istnieje taki punkt E, że trójkąt ABE jest równoboczny. Na zewnątrz rombu $ABCD$ wybrano taki punkt F, że trójkąt BCF jest równoboczny. Wykaż, że punkty: D, E i F leżą na jednej prostej.

5. [6 pkt.] Zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 20, 21\}$ rozbijamy na takie dwa rozłączne zbiory A i B, że zbiór A ma dwa elementy, a zbiór B ma dziewiętnaście elementów. Rozstrzygnij, czy istnieje takie rozbicie, w którym iloczyn elementów zbioru A jest równy sumie wszystkich elementów zbioru B.

Powodzenia!