

# XX Śląski Konkurs Matematyczny

7 lutego 2023 r.

zawody rejonowe

czas: 10:00 – 12:00

1. [6 pkt.] Rozstrzygnij, czy liczba  $\underbrace{111\dots 11}_{2023 \text{ jedynek}}$  jest kwadratem liczby całkowitej.

2. [6 pkt.] Dana jest szachownica  $20 \times 20$ . Na jej głównej przekątnej stoją pionki — po jednym na każdym polu. Michał może w jednym ruchu zmienić położenie dokładnie trzech dowolnie wybranych pionków w taki sposób, że każdy z nich przesunąć dokładnie o jedno pole w dół. Rozstrzygnij, czy Michał może za pomocą tych operacji przesunąć wszystkie pionki do najniższego rzędu szachownicy.

3. [6 pkt.] Wykaż, że dla dowolnych, dodatnich liczb rzeczywistych  $a, b$  prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b+2)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{5}.$$

4. [6 pkt.] Dany jest trapez  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$  oraz kąt  $BCD$  jest kątem rozwartym. Dwusieczna kąta  $BCD$  przecina prostą  $AB$  w punkcie  $E$ . Okrąg  $\omega$  wpisany w trójkąt  $BCE$  jest styczny do boków  $BC$  i  $BE$  w punktach odpowiednio  $M$  i  $N$ . Wyznacz miarę kąta  $BCD$ , jeśli  $BC = 2$  i  $MN = 1$ .

5. [6 pkt.] Rozwiąż równanie

$$\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} = x.$$

Uwaga. Symbol  $\lfloor a \rfloor$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby rzeczywistej  $a$  oraz  $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ .

*Powodzenia!*