XV Śląski Konkurs Matematyczny

24 stycznia 2018 r. **zawody rejonowe** czas: 10:00 – 12:00

1. [6 pkt.] Dane są dodatnie liczby całkowite a i b, dla których liczba $\frac{a^3+b}{a+b}$ jest liczbą całkowitą. Wykaż, że również liczba $\frac{b^3+a}{b+a}$ jest liczbą całkowitą.

2. [6 pkt.] Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których każda z liczb

$$p^2+2, \quad p^3+2, \quad p^4+2$$

jest liczbą pierwszą.

3. [6 pkt.] Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0.$$

Wykaż, że

$$\frac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}\,.$$

4. [6 pkt.] Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości 1 i x. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi wierzchołków odpowiednio B i D na jego przekątną AC. Dla jakich wartości x punkty E i F dzielą przekątną AC na trzy równe części?

5. [6 pkt.] Pewien bogacz z okazji 15-lecia pewnego konkursu matematycznego postanowił obdarować pieniędzmi tych jego uczestników, którzy uzyskają najlepsze wyniki. Przygotował do rozdania 2018 monet. Postawił jednak jeden warunek: każdy z obdarowanych ma otrzymać co najmniej jedną monetę oraz różne osoby mają otrzymać różne liczby monet. Jaka jest największa liczba uczestników konkursu, które może obdarować bogacz zgodnie z postawionym warunkiem?

Powodzenia!