XVIII Śląski Konkurs Matematyczny

23 lutego 2021 r. **zawody rejonowe** czas: 10:00 – 12:00

1. [6 pkt.] Dla dodatnich liczb całkowitych m, n ($n \geqslant 2$) działanie ∇ definiujemy wzorem:

$$m \nabla n = m + \sqrt[n]{n}.$$

Udowodnij, że prawdziwe są nierówności

$$2022\nabla 2 > 2021\nabla 3 > 2020\nabla 4.$$

2. [6 pkt.] Niech $\overline{abc}$ oznacza trzycyfrową liczbę naturalną o cyfrach różnych od zera, w której a jest cyfrą setek, b – cyfrą dziesiątek, a c – cyfrą jedności. Wykaż, że jeżeli liczba $\overline{abc}$ jest podzielna przez 37, to również liczby $\overline{bca}$ i $\overline{cab}$ są podzielne przez 37.

3. [6 pkt.] Niech liczby rzeczywiste a, b, c i d spełniają równości

$$a + b = c + d \qquad \text{oraz} \qquad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$a^n + b^n = c^n + d^n.$$

4. [6 pkt.] Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 24$. Okrąg ω przechodzi przez punkt C i jest styczny do boku AB w takim punkcie D, że $AD = 3 \cdot BD$. Okrąg ω przecina też boki AC i BC odpowiednio w takich punktach E i F (różnych od C), że $BF = 3$ i $CE = 3\sqrt{3}$. Wyznacz kąty trójkąta ABC.

5. [6 pkt.] W zbiorze $\mathcal{M}$ są wszystkie liczby siedmiocyfrowe zapisane za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i takie, że żadna cyfra w zapisie tych liczb nie powtarza się. Rozstrzygnij, czy w zbiorze $\mathcal{M}$ istnieje 5 takich liczb, że suma trzech z nich jest sumą dwóch pozostałych.

Powodzenia!