

**V Śląski Konkurs Matematyczny**  
**zawody rejonowe — luty 2008**

**1.** Wykaż, że dla dodatnich liczb  $m, n$  zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \sqrt{\frac{m+n}{mn}}.$$

**2.** W trójkąt prostokątny, o przyprostokątnych 5 i 12, wpisano okrąg. Oblicz najmniejszą z odległości wierzchołka kąta prostego od punktów tego okręgu.

**3.** Wyznacz wszystkie pary  $(x, y)$  liczb całkowitych, które spełniają równanie  $xy + y = 5x + 2008$ .

**4.** Liczby  $a$  i  $b$  są takimi liczbami całkowitymi, że  $a^2 + 119ab + b^2$  dzieli się przez 11. Wykaż, że  $a^3 - b^3$  też dzieli się przez 11.

**5.** Prostokąt  $ABCD$  o bokach długości  $AB = a$  i  $AD = b$ , gdzie  $a > b$ , przekształcono przez symetrię osiową względem prostej zawierającej przekątną  $AC$  tego prostokąta. Jaka figurą jest część wspólna prostokąta  $ABCD$  i jego obrazu? Odpowiedź uzasadnij. Oblicz pole tej figury.