

IV Śląski Konkurs Matematyczny zawody rejonowe — luty 2007

1. Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą oraz $p > 3$, to liczba $p^2 - 1$ dzieli się przez 24.
2. Oblicz pole trapezu prostokątnego, wiedząc, że odległości środka okręgu wpisanego w ten trapez od końców ramienia nieprostokątnego do podstaw są równe a i $2a$.
3. Liczbę 2007 przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb naturalnych. Ile rozwiązań ma to zadanie? Odpowiedź uzasadnij.
4. Wykaż, że jeśli a i b są takimi liczbami dodatnimi, że $a \cdot b \geq a + b$, to $a + b \geq 4$.
5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne zewnętrznie. Wykaż, że istnieje okrąg styczny do każdego boku czworokąta $ABCD$.