

I Śląski Konkurs Matematyczny
zawody rejonowe — grudzień 2003

1. Narysuj figurę

$$\mathcal{F} = \left\{ (x, y) : x \in \mathbf{R} \text{ i } y \in \mathbf{R}, \text{ i } \left| |x| - 1 \right| + \left| |y| - 1 \right| = 1 \right\}.$$

2. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych, które spełniają równanie

$$(x^2 + 2003)(y^2 + 2003) = 2003(x + y)^2.$$

3. Środkami boków AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$ są odpowiednio punkty K i L . Wykaż, że pole trójkąta ALB jest równe sumie pól trójkątów AKD i BKC .

4. Wykaż, że jeżeli x, y są liczbami dodatnimi, to prawdziwe są nierówności

$$\frac{x}{y + \max\{x, y\}} + \frac{y}{x + \max\{x, y\}} \leq 1 \leq \frac{x}{y + \min\{x, y\}} + \frac{y}{x + \min\{x, y\}}.$$