XVIII Śląski Konkurs Matematyczny

Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2021

Zadanie 1.

Z przedziału $(0;10)$ Michał wybrał 21 liczb niewymiernych. Wykaż, że wśród liczb wybranych przez Michała są takie trzy liczby a, b i c, że spełnione są nierówności: $|a-b|<1$, $|b-c|<1$, $|c-a|<1$.

Rozwiązanie

Ponieważ Michał wybrał liczby niewymierne z przedziału $(0;10)$, więc żadna z nich nie jest liczbą całkowitą. Stąd wynika, że te liczby należą do zbioru

$$A=(0;1)\cup(1;2)\cup(2;3)\cup\ldots\cup(8;9)\cup(9;10)$$

będącego sumą dziesięciu rozłącznych przedziałów.

Skoro Michał wybrał dokładnie 21 liczb, więc w jednym z tych dziesięciu przedziałów muszą się znaleźć co najmniej trzy liczby (gdyby tak nie było, to Michał wybrałby co najwyżej $10\cdot 2=20$ liczb).

Wybierzmy więc teraz trzy liczby wybrane przez Michała, które znalazły się w jednym z przedziałów postaci $(k;k+1)$, gdzie k jest pewną liczbą ze zbioru $\{0,1,2,\ldots,9\}$ i oznaczmy je: a, b, c.

Zauważmy, że jeśli $x,\ y\in(k;k+1)$, to $|x-y|<1$. Zatem dla wybranych liczb a, b, c spełnione są nierówności: $|a-b|<1$, $|b-c|<1$, $|c-a|<1$. Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie pary (p,q) liczb pierwszych, dla których również każda suma:

$$p^2+q^3,\quad p^3+q^2,\quad p+p^2+p^3+q+q^2+q^3$$

jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

Zauważmy, że liczby p i q nie mogą być tej samej parzystości. Istotnie, gdyby liczby p i q były tej samej parzystości, wówczas każda suma byłaby liczbą parzystą i większą od 2, więc byłaby liczbą złożoną. Zatem wśród liczb p, q jedna jest równa 2 i druga z nich jest większa od 2.

Ze względu na symetrię podanych sum względem p i q, jeśli para (p,q) spełnia warunki zadania, to również para (q,p) spełnia warunki zadania. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p=2$ i $q>2$.

Gdy $q\equiv 2 \pmod 3$, to wówczas

$$p^2+q^3\equiv 4+8=12\equiv 0 \pmod 3$$

i jako liczba większa od 3 jest ona liczbą złożoną.

Jeśli natomiast $q\equiv 1 \pmod 3$, to wtedy

$$p^3+q^2\equiv 8+1=9\equiv 0 \pmod 3,$$

więc jest to też liczba złożona (podzielna przez 3 i większa od 3).

Pozostaje ostatni przypadek, gdy $q\equiv 0 \pmod 3$. Jedyną liczbą pierwszą spełniającą tę kongruencję jest $q=3$. Stąd otrzymujemy, że rozwiązaniami zadania mogą być tylko pary $(p,q)\in\{(2,3),(3,2)\}$. Łatwo sprawdzamy, że podane w zadaniu sumy są odpowiednio równe: 17, 31 i 53 i są to liczby pierwsze.

Zadanie 3. Maszyna licząca „SKM-21” wykonuje tylko dwie operacje na uporządkowanych czwórkach liczb:

(1) czwórkę (a,b,c,d) zamienia na czwórkę $(a+1,b+d,c-1,d+1)$,

(2) czwórkę (a,b,c,d) zamienia na czwórkę $(a,b-1,c+2,d+1)$.

Rozstrzygnij, czy za pomocą tej maszyny z czwórki $(3,4,2,1)$ można otrzymać czwórkę $(6,5,7,8)$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że zarówno operacja (1) jak i operacja (2) powiększają liczbę d o 1. Wynika stąd, że aby od $d=1$ dojść do $d=8$ musimy wykonać dokładnie siedem operacji. Jednocześnie operacja (2) nie zmienia liczby a, a operacja (1) powiększa ją o 1. Zatem aby dojść od $a=3$ do $a=6$ należy wykonać dokładnie trzy operacje (1). Ostatecznie trzeba wykonać dokładnie trzy operacje (1) oraz dokładnie cztery operacje (2).

Zauważmy teraz, że wykonując trzy operacje (1) powiększamy liczbę b co najmniej o $1+2+3=6$, a wykonując cztery operacje (2) zmniejszamy liczbę b dokładnie o 4. Oznacza to, że liczba b zostaje powiększona co najmniej o $6-4=2$. Nie możemy więc z liczby 4 otrzymać liczby 5. Reasumując: za pomocą tej maszyny nie jest możliwe, aby z czwórki $(3,4,2,1)$ otrzymać czwórkę $(6,5,7,8)$.

Zadanie 4.

Liczby a, b, c, d są dodatnie oraz $a+b+c+d=1$ i $ac+bd=\frac{1}{15}$. Wykaż, że

$$ad+bc\leqslant\frac{11}{60}.$$

Rozwiązanie

Sposób 1.

Zauważmy, że $ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d)$. Ze znanej zależności $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y, na mocy założeń zadania, otrzymujemy, że

$$(ac+bd)+(ad+bc)=(a+b)(c+d)\leqslant\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

czyli $\frac{1}{15}+ad+bc\leqslant\frac{1}{4}$ i wobec tego

$$ad+bc\leqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{15}=\frac{15}{60}-\frac{4}{6}=\frac{11}{60}$$

co dowodzi tezy zadania.

Sposób 2.

Wykorzystując równość $ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d)$ oraz warunek $a+b+c+d=1$, przyjmijmy oznaczenia: $a+b=x$ i $c+d=1-x$, gdzie $0<x<1$ i $0<1-x<1$. Wobec tego otrzymujemy zależność

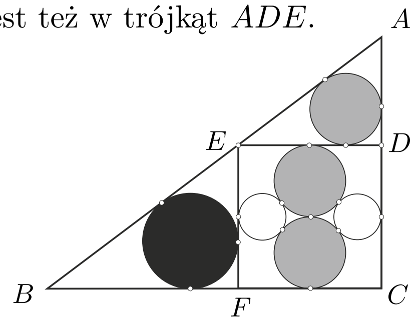
$$(ac+bd)+(ad+bc)=(a+b)(c+d)=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4},$$

skąd już wynika, że

$$ad+bc\leqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{15}=\frac{15}{60}-\frac{4}{6}=\frac{11}{60}.$$

Zadanie 5.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt ACB jest prosty i kwadrat $CDEF$ wpisany w ten trójkąt (zobacz rysunek). Dwa jednakowe koła szare i dwa jednakowe koła białe wpisane są w kwadrat, jak pokazano na rysunku. Koło szare wpisane jest też w trójkąt ADE. Koło czarne wpisane jest w trójkąt BEF. Długość promienia koła białego jest równa r_1, a koła czarnego r_2.

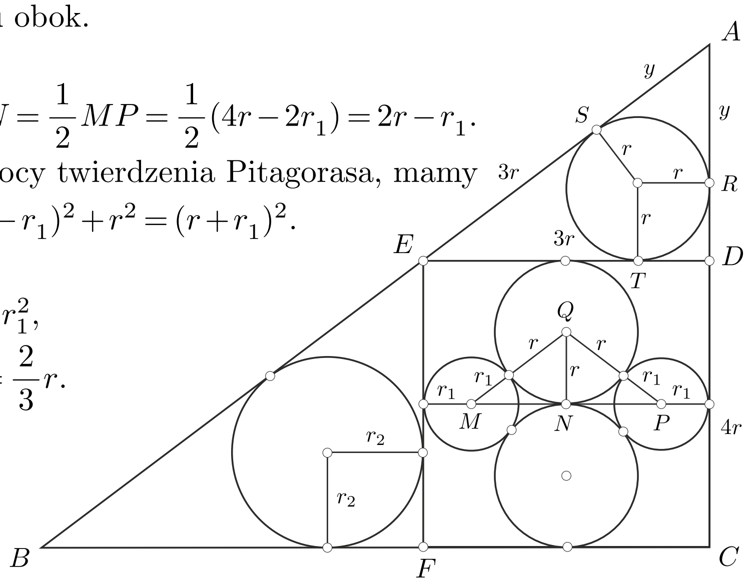


Wyznacz $\frac{r_2}{r_1}$.

Uwaga. Koła szare mają jednakowe promienie.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.



Zauważmy, że

$$CD = ED = EF = 4r \quad \text{oraz} \quad MN = \frac{1}{2}MP = \frac{1}{2}(4r - 2r_1) = 2r - r_1.$$

Z trójkąta prostokątnego MNQ, na mocy twierdzenia Pitagorasa, mamy

$$MN^2 + QN^2 = MQ^2 \quad \text{czyli} \quad (2r - r_1)^2 + r^2 = (r + r_1)^2.$$

Z ostatniej równości wynika, że

$$4r^2 - 4rr_1 + r_1^2 + r^2 = r^2 + 2rr_1 + r_1^2,$$

czyli $4r^2 = 6rr_1$, co daje zależność $r_1 = \frac{2}{3}r$.

Ponieważ $ED = 4r$ oraz $TD = r$, więc (na podstawie twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu) $ET = ES = 3r$. Również $AS = AR$.

Przyjmując teraz $AS = AR = y$ dostajemy, że $AD = y + r$ i $AE = y + 3r$. Skoro trójkąt AED jest prostokątny, więc z równości

$$AD^2 + ED^2 = AE^2$$

otrzymujemy kolejno

$$(y + r)^2 + (4r)^2 = (y + 3r)^2,$$
$$y^2 + 2yr + r^2 + 16r^2 = y^2 + 6yr + 9r^2,$$
$$4yr = 8r^2,$$

a stąd $y = 2r$. Zatem: $AD = 3r$, $ED = 4r$ oraz $AE = 5r$.

Ponieważ trójkąty EBF i AED są podobne (mają takie same kąty), więc

$$\frac{r_2}{EF} = \frac{r}{AD},$$
$$\frac{r_2}{4r} = \frac{r}{3r},$$

skąd $r_2 = \frac{4}{3}r$.

Poszukiwany w zadaniu stosunek jest więc równy $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{4}{3}r}{\frac{2}{3}r} = 2.$ $\quad$ (*tsz*)