XXI Śląski Konkurs Matematyczny

26 marca 2024 r.	**zawody finałowe**	czas: 120 minut

1. [6 pkt.] Na skwerze zakwitły trzy krzewy w kolorach: białym, żółtym i czerwonym. Liczba wszystkich kwiatów była dwa razy większa od liczby kwiatów białych. Po kilku dniach z krzewów opadło sześć kwiatów i wtedy suma wszystkich kwiatów na krzewach była dwa razy większa od liczby kwiatów żółtych. Po kolejnych kilku dniach z krzewów opadło jeszcze osiem kwiatów i wtedy na krzewach było razem dwa razy więcej kwiatów niż kwiatów czerwonych, a liczby kwiatów białych, żółtych i czerwonych, w tej kolejności, były kolejnymi liczbami naturalnymi. Ile kwiatów poszczególnych kolorów było na tych krzewach w pierwszym dniu?

2. [6 pkt.] Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość

$$\sqrt{abc} = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{3}{2}.$$

3. [6 pkt.] Liczba n jest sumą kwadratów trzech liczb całkowitych. Wykaż, że liczbę $3n$ można przedstawić jako sumę kwadratów czterech liczb całkowitych.

4. [6 pkt.] W trójkąt ABC wpisano okrąg ω, który jest styczny do boków: AB, BC, AC w punktach odpowiednio: C_1, A_1, B_1. Punkt K jest drugim końcem średnicy okręgu ω, przechodzącej przez punkt C_1. Na prostej B_1C_1 wybrano taki punkt D, że odcinki AB i CD są równoległe. Wykaż, że punkty: A_1, K, D leżą na jednej prostej.

5. [6 pkt.] Na okręgu umieszczono 2024 lampki, każda z przełącznikiem, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) dwóch sąsiadujących z nim lampek nie zmieniając stanu lampki z przełącznikiem. Początkowo dwie sąsiednie lampki są zapalone, a pozostałe są zgaszone. Rozstrzygnij, czy przy użyciu dostępnych przełączników można doprowadzić do sytuacji, że wszystkie lampki będą zapalone.

Powodzenia!