

## XX Śląski Konkurs Matematyczny

21 marca 2023 r.

zawody finałowe

czas: 120 minut

1. [6 pkt.] Wyznacz wszystkie pary  $(x, y)$  liczb rzeczywistych spełniające równanie

$$x^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

2. [6 pkt.] Na tablicy zostały zapisane liczby naturalne: 1, 2, 3, ..., 32, 33. W jednym ruchu wybieramy dwie liczby, spośród zapisanych na tablicy, ścieramy je, a na tablicy do pozostałych liczb dopisujemy ich sumę albo ich różnicę. Operację tę powtarzamy i po 32 takich ruchach na tablicy pozostaje tylko jedna liczba. Rozstrzygnij, czy można tak wybierać liczby w kolejnych ruchach, aby ostatnią liczbą zapisaną na tablicy była liczba 0.

3. [6 pkt.] Wykaż, że dla dowolnych, dodatnich liczb rzeczywistych  $a, b$  spełniona jest nierówność

$$a + b + 20 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2 \left( \sqrt{a+20} + \sqrt{b+20} - 1 \right).$$

4. [6 pkt.] Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg. Na jego przekątnych  $AC$  i  $BD$  istnieją odpowiednio takie punkty  $K$  i  $L$ , że

$$AK = AB \quad \text{i} \quad DL = DC.$$

Wykaż, że proste  $KL$  i  $AD$  są równoległe.

5. [6 pkt.] Wykaż, że nie istnieje taka liczba rzeczywista  $a$ , dla której liczby

$$a + \sqrt{2023} \quad \text{i} \quad \frac{1}{a} + \sqrt{2023}$$

są liczbami całkowitymi.

*Powodzenia!*