

XIX Śląski Konkurs Matematyczny

11 kwietnia 2022 r.

zawody finałowe

czas: 120 minut

1. [6 pkt.] Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{yz} \\ y^2 = \frac{2}{xz} \\ z^2 = \frac{8}{xy} \end{cases}$$

2. [6 pkt.] Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ spełniające oba warunki:

$$1^\circ f(2) = 22,$$

$$2^\circ f(xy + 2x - y) = f(x + 1) \cdot f(y - 1) + 23x - 22y$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y .

3. [6 pkt.] Rozstrzygnij, dla jakich nieujemnych liczb całkowitych n , liczba

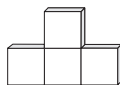
$$A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n$$

jest podzielna przez 3.

4. [6 pkt.] W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C poprowadzono dwusieczną kąta BAC , która przecina bok BC w punkcie D . Wykaż, że

$$AD = \sqrt{AB \cdot AC - DB \cdot DC}.$$

5. [6 pkt.] Trimino to klocek zbudowany z trzech kwadratów jednostkowych (rysunek po lewej), a tetramino — z czterech kwadratów jednostkowych (rysunek po prawej). Laura ma 100 klocków trimino oraz 75 klocków tetramino. Twierdzi, że potrafi nimi szczelnie wypełnić szachownicę o wymiarach 20×30 i nie kładąc jednego klocka na drugim. Czy Laura ma rację? Odpowiedź uzasadnij.



Powodzenia!