

XVIII Śląski Konkurs Matematyczny

13 kwietnia 2021 r.

zawody finałowe

czas: 120 minut

1. [6 pkt.] Z przedziału $(0; 10)$ Michał wybrał 21 liczb niewymiernych. Wykaż, że wśród liczb wybranych przez Michała są takie trzy liczby a , b i c , że spełnione są nierówności: $|a - b| < 1$, $|b - c| < 1$, $|c - a| < 1$.

2. [6 pkt.] Wyznacz wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych, dla których również każda suma:

$$p^2 + q^3, \quad p^3 + q^2, \quad p + p^2 + p^3 + q + q^2 + q^3$$

jest liczbą pierwszą.

3. [6 pkt.] Maszyna licząca „SKM-21” wykonuje tylko dwie operacje na uporządkowanych czwórkach liczb:

(1) czwórkę (a, b, c, d) zamienia na czwórkę $(a + 1, b + d, c - 1, d + 1)$,

(2) czwórkę (a, b, c, d) zamienia na czwórkę $(a, b - 1, c + 2, d + 1)$.

Rozstrzygnij, czy za pomocą tej maszyny z czwórki $(3, 4, 2, 1)$ można otrzymać czwórkę $(6, 5, 7, 8)$.

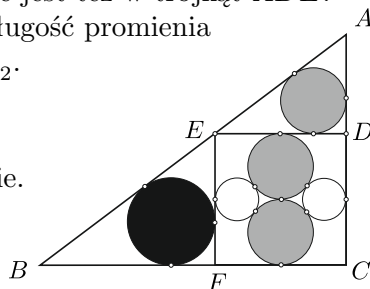
4. [6 pkt.] Liczby a , b , c , d są dodatnie oraz $a + b + c + d = 1$ i $ac + bd = \frac{1}{15}$. Wykaż, że

$$ad + bc \leq \frac{11}{60}.$$

5. [6 pkt.] Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym kąt ACB jest prosty i kwadrat $CDEF$ wpisany w ten trójkąt (zobacz rysunek). Dwa jednakowe koła szare i dwa jednakowe koła białe wpisane są w kwadrat, jak pokazano na rysunku. Koło szare wpisane jest też w trójkąt ADE . Koło czarne wpisane jest w trójkąt BEF . Długość promienia koła białego jest równa r_1 , a koła czarnego r_2 .

Wyznacz $\frac{r_2}{r_1}$.

Uwaga. Koła szare mają jednakowe promienie.



Powodzenia!