XI Śląski Konkurs Matematyczny

26 marca 2014 r. **zawody finałowe** czas: 120 minut

Zadanie 1. (5 pkt.)

Wykaż, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba

$$\underbrace{2014\,2014\,2014\ \ldots\ 2014\,2014}_{n\text{-krotnie powtórzona liczba 2014}}$$

jest podzielna przez 2013.

Zadanie 2. (5 pkt.)

Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, które dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y spełniają równanie

$$f(x)\cdot f(y) = f(xy) + x^2 + y^2.$$

Zadanie 3. (5 pkt.)

Wyznacz wszystkie pary (p,q) liczb pierwszych spełniające równanie

$$p^2 = 12q^2 + 1.$$

Zadanie 4. (5 pkt.)

W okrąg o środku O wpisano trójkąt ostrokątny ABC. Odcinki AA_1 i BB_1 są wysokościami tego trójkąta. Wykaż, że proste A_1B_1 i OC są prostopadłe.

Zadanie 5. (5 pkt.)

Na płaszczyźnie wybrano dowolnie 50 różnych punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Wykaż, że istnieje 25 odcinków, których końcami są wybrane punkty oraz żadne dwa spośród tych odcinków nie przecinają się.

Powodzenia!