Szkice rozwiązań zadań – zawody rejonowe 2024

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x+\sqrt[4]{x}=y+\sqrt[4]{y} \\ x^2+xy+y^2=1200. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Sposób 1.

Musimy założyć, że $x\geqslant 0$ i $y\geqslant 0$. Równanie pierwsze danego układu możemy teraz zapisać w postaci

(1) $$\left(\sqrt[4]{x}\,\right)^4+\sqrt[4]{x}=\left(\sqrt[4]{y}\,\right)^4+\sqrt[4]{y}.$$

Korzystając z zależności
$$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2),$$
równość (1) możemy zapisać kolejno
$$\left(\sqrt[4]{x}\,\right)^4-\left(\sqrt[4]{y}\,\right)^4+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=0,$$
$$\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\,\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\,\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,\right)+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=0,$$
$$\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\,\right)\Big[\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\,\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+1\Big]=0.$$

Z uwagi na początkowe założenie o x i y, wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest dodatnie, zatem $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=0$, skąd dostajemy $x=y$. Skoro $x=y$, to drugie równanie danego w zadaniu układu przyjmuje postać $3x^2=1200$, skąd $x^2=400$. Ponieważ $x\geqslant 0$, więc $x=20$. Stąd rozwiązaniem danego układu może być tylko para $(x,y)=(20,20)$ i, jak łatwo sprawdzić, tak jest istotnie.

Sposób 2.

Jak w sposobie 1. zakładamy, że $x\geqslant 0$ i $y\geqslant 0$. Zauważmy, że jeśli $x=0$, to z równania pierwszego dostajemy, że również $y=0$ (również odrotnie, jeśli byłoby $y=0$, to też $x=0$). Nie jest to możliwe, bo nie byłoby spełnione równanie drugie danego układu.

Niech teraz $x>0$ i $y>0$. Gdyby zachodziła nierówność $x>y$, to mielibyśmy
$$x+\sqrt[4]{x}>y+\sqrt[4]{y},$$
zatem nie byłoby spełnione równanie pierwsze danego układu. Analogicznie nie może być $y>x$. Zatem może być tylko $x=y$. Jeśli tak jest, to — jak w sposobie 1. — dostajemy, że $x=y=20$.

Zadanie 2.

Michał wybierał takie liczby całkowite a_1, a_2, a_3, $\dots$, a_n, że

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2024.$$

Następnie dla wybranych przez siebie liczb obliczał reszty z dzielenia

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3$$

przez 6. Wyznacz wszystkie możliwe reszty jakie mógł otrzymać Michał.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z faktu, że dla liczby całkowitej m liczba $m^3 - m$ dzieli się przez 6. Jest tak ponieważ dla liczby całkowitej m wyrażenie

$$m^3 - m = m(m^2 - 1) = (m-1) \cdot m \cdot (m+1)$$

jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. Wiadomo, że wśród trzech kolejnych liczb całkowitych dokładnie jedna dzieli się przez 3 i co najmniej jedna dzieli się przez 2. Skoro 2 i 3 są względnie pierwsze, więc iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych dzieli się przez $2 \cdot 3 = 6$.

Zauważmy, że

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 = \Big[(a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + (a_3^3 - a_3) + \dots + (a_n^3 - a_n)\Big] + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n).$$

Na podstawie faktu powyżej, wyrażenie w nawiasie kwadratowym dzieli się przez 6, więc wystarczy wyznaczyć resztę z dzielenia przez 6 liczby 2024, a ta jest równa 2 i tylko taką resztę mógł otrzymać Michał.

Uwaga. Dowód, że liczby a^3 i a przy dzieleniu przez 6 dają tę samą resztę można również przeprowadzić używając języka kongruencji.

Zadanie 3.

Liczby $2a - b$, $2b - c$, $2c - d$ i $2d - a$ są dodatnie. Wykaż, że każda z liczb a, b, c i d jest dodatnia.

Rozwiązanie

Sposób 1.

Jeżeli liczby: $2a - b$, $2b - c$, $2c - d$ i $2d - a$ są dodatnie, to również dodatnie są liczby:

$$16a - 8b, \quad 8b - 4c, \quad 4c - 2d \quad \text{oraz} \quad 2d - a.$$

Zatem ich suma też jest dodatnia, czyli

$$(16a - 8b) + (8b - 4c) + (4c - 2d) + (2d - a) = 15a > 0.$$

Stąd $a > 0$.
Analogicznie wykazujemy, że pozostałe liczby są dodatnie.

Uwaga. Jeśli mamy już informację, że $a > 0$, to z faktu, że $2d - a > 0$ dostajemy, że $2d > a > 0$, skąd uzyskujemy, że $d > 0$. Kontynuując to rozumowanie i wykorzystując nierówności

$$2c > d, \quad 2b > c$$

otrzymujemy, że również $c > 0$ i $b > 0$.

Sposób 2.

Załóżmy, że jedna z liczb a, b, c, d jest niedodatnia. Przyjmijmy bez straty ogólności, że jest to liczba a. Z warunków $2a - b > 0$ i $a \leqslant 0$ dostajemy $b < 2a \leqslant 0$, skąd $b < 0$.

Jeśli $b < 0$, to kontynuując powyższe rozumowanie, otrzymujemy, że również $c < 0$ i $d < 0$. Jest to jednak niemożliwe, bo mielibyśmy jednocześnie

$$a + b + c + d < 0 \quad \text{i} \quad 2a - b + 2b - c + 2c - d + 2d - a = a + b + c + d > 0.$$

Zatem żadna z liczb a, b, c, d nie może być niedodatnia, więc każda z nich jest dodatnia.

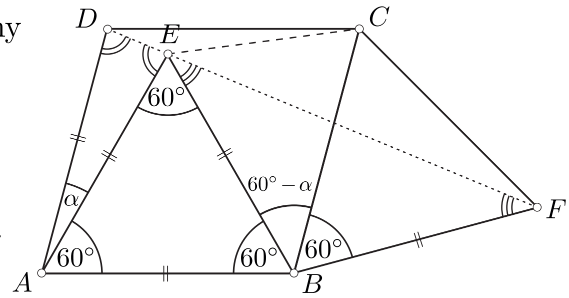
Uwaga. Jest to zadanie nr 228 w: Mokrski B., Siwy J., Szymczyk T., *Matematyczny sezam. 20 lat Śląskiego Konkursu Matematycznego.* Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2023
lub
zadanie nr 178 w: Mokrski B., Siwy J., Szymczyk T., *Matematyczny sezam. 15 lat Śląskiego Konkursu Matematycznego.* Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2018.

Zadanie 4.

Dany jest romb $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A i większym od $60°$. Wewnątrz tego rombu istnieje taki punkt E, że trójkąt ABE jest równoboczny. Na zewnątrz rombu $ABCD$ wybrano taki punkt F, że trójkąt BCF jest równoboczny. Wykaż, że punkty: D, E, F leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $AD=AE=AB=BE=BF$. Stąd trójkąty ADE i BEF są równoramienne.



Z założenia $60° < \sphericalangle BAD < 90°$, czyli $\sphericalangle DAE = \alpha$, gdzie $0 < \alpha < 30°$. Ponieważ trójkąt ADE jest równoramienny ($AD = AE$), więc

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle ADE = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Czworokąt $ABCD$ jest rombem, więc

$$\sphericalangle ABC = 180° - \sphericalangle BAD = 180° - (60° + \alpha) = 120° - \alpha.$$

Skoro $\sphericalangle ABE = 60°$, więc $\sphericalangle CBE = 60° - \alpha$.

Również $\sphericalangle CBF = 60°$, a stąd dostajemy, że $\sphericalangle EBF = 120° - \alpha$. Trójkąt EBF też jest równoramienny ($BE = BF$), więc

$$\sphericalangle BEF = \sphericalangle BFE = 30° + \frac{\alpha}{2}.$$

Zatem

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle AED + \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEF = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + 60° + \left(30° + \frac{\alpha}{2}\right) = 180°,$$

czyli E leży na odcinku DF, więc punkty D, E i F leżą na jednej prostej.

Zadanie 5.

Zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 20, 21\}$ rozbijamy na takie dwa rozłączne zbiory A i B, że zbiór A ma dwa elementy, a zbiór B ma dziewiętnaście elementów. Rozstrzygnij, czy istnieje takie rozbicie, w którym iloczyn elementów zbioru A jest równy sumie wszystkich elementów zbioru B.

Rozwiązanie

Niech w zbiorze A będą elementy x i y ($x < y$). Zauważmy, że $x, y \in \{1, 2, 3, \ldots, 20, 21\}$. Zatem ma zachodzić równość

$$xy = 1+2+3+\cdots+20+21-x-y.$$

Równość tę możemy zapisać równoważnie

$$\begin{aligned} xy+x+y &= 1+2+3+\cdots+20+21, \\ xy+x+y+1 &= \frac{21\cdot 22}{2}+1, \\ (x+1)(y+1) &= 232. \end{aligned}$$

Skoro $x < y$, to również $x+1 < y+1$. Zauważmy, że $232 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 29$. Stąd $y+1 \geqslant 29$, czyli $y \geqslant 28$, a takiej liczby nie ma w danym zbiorze. Zatem danego w zadaniu zbioru nie można rozbić na dwa zbiory A i B zgodnie z warunkami zadania.

(*tsz*)