Szkice rozwiązań zadań — zawody rejonowe 2022

Zadanie 1.

Wykaż, że liczba
$$1!+2!+3!+4!+\cdots+2019!+2020!+2021!+2022!$$
nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Uwaga. Jeśli $n\geqslant 1$ jest liczbą naturalną, to $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$.

Rozwiązanie

Obliczając początkowe składniki podanej sumy, dostajemy:
$$1!=1,\quad 2!=1\cdot 2=2,\quad 3!=1\cdot 2\cdot 3=6,\quad 4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,\quad 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$$
Zauważmy, że jeśli $n\geqslant 5$, to w wyrażeniu $n!$ wystąpi zarówno czynnik 2, jak i 5. Stąd dla każdego $n\geqslant 5$ liczba $n!$ dzieli się przez 10, więc jej cyfrą jedności jest 0. Zatem cyfrą jedności sumy
$$5!+6!+7!+\cdots+2020!+2021!+2022!$$
jest zero. Wnioskujemy stąd, że cyfrą jedności liczby danej w zadaniu jest cyfra jedności liczby
$$1!+2!+3!+4!=1+2+6+24=33.$$

Korzystając z faktu:

jeśli cyframi jedności liczb naturalnych x i y są odpowiednio cyfry c i d, to cyfrą jedności iloczynu xy jest cyfra jedności iloczynu cd,

dostajemy, że cyfrą jedności kwadratu liczby naturalnej nie może być 3 (zobacz tabelka poniżej).

cyfra jedności liczby n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cyfra jedności liczby n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Wyznacz i w układzie współrzędnych narysuj zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie
$$\max\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right\}-\max\{x,y\}=\min\{x,y\}-\min\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right\}.$$

Rozwiązanie

Aby zadanie miało sens muszą być spełnione warunki: $x\neq 0$ i $y\neq 0$.

Dane w zadaniu równanie zapiszemy w postaci równoważnej

$$\max\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right\}+\min\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right\}=\max\{x,y\}+\min\{x,y\}. \tag{1}$$

Zauważmy teraz, że dla dowolnych liczb a, b prawdziwa jest zależność
$$\max\{a,b\}+\min\{a,b\}=a+b.$$
Stąd równanie (1) przybiera postać
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=x+y$$

i dalej równoważnie

$$\frac{x+y}{xy}=x+y$$

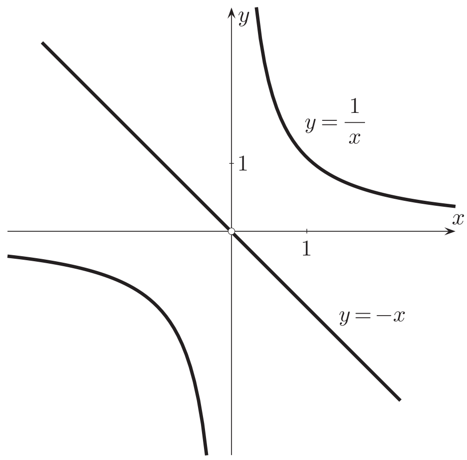
$$(x+y)\left(\frac{1}{xy}-1\right)=0$$

$$(x+y)\cdot\frac{1-xy}{xy}=0.$$

Stąd dostajemy $x+y=0$ lub $1-xy=0$, czyli

$$y=-x \quad \text{lub} \quad y=\frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x\neq 0.$$

Poszukiwany zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie dane w zadaniu przedstawia rysunek obok.



Zadanie 3.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb a i b prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a^2+1}+2\sqrt{b^2+1}\geqslant\sqrt{(a+2b)^2+9}\,.$$

Rozwiązanie

Ponieważ obie strony nierówności są dodatnie, więc podnosząc ją obustronnie do kwadratu, otrzymujemy nierówność równoważną

$$a^2+1+4\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}+4(b^2+1)\geqslant a^2+4ab+4b^2+9$$

$$4\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\geqslant 4ab+4$$

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\geqslant ab+1.$$

Ponieważ dla dodatnich a, b mamy $ab>0$, więc obie strony ostatniej nierówności też są dodatnie. Zatem znów można podnieść obustronnie do kwadratu, aby otrzymać nierówność równoważną. Stąd

$$a^2b^2+a^2+b^2+1\geqslant a^2b^2+2ab+1,$$

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

$$(a-b)^2\geqslant 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, więc również nierówność dana w zadaniu jest zawsze prawdziwa.

Uwaga. Można wykazać nieco więcej niż wymaga treść zadania. Mianowicie, że dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b (zobacz zadanie nr 200 w: Mokrski B., Siwy J., Szymczyk T., *Matematyczny sezam. 15 lat Śląskiego Konkursu Matematycznego*, Wydawnictwo OMEGA, Kraków 2018).

Zadanie 4.

W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt o bokach długości: a, b, c. Wyznacz miary kątów tego trójkąta, jeżeli spełniony jest warunek $R=\dfrac{abc}{b^2+c^2}$.

Rozwiązanie

Ponieważ dla dowolnych liczb rzeczywistych b, c (w szczególności dla liczb dodatnich) prawdziwa jest nierówność $b^2+c^2\geqslant 2bc$, więc $R=\dfrac{abc}{b^2+c^2}\leqslant\dfrac{abc}{2bc}=\dfrac{a}{2}$, skąd mamy $a\geqslant 2R$.

Jednak w trójkącie wpisanym w okrąg o promieniu R długość żadnego boku nie przekracza $2R$, zatem musi być $a = 2R$.

Jeśli bok trójkąta pokrywa się ze średnicą okręgu na nim opisanego, to jest to trójkąt prostokątny o kącie prostym leżącym naprzeciw tego właśnie boku. Korzystając teraz z faktu, że $a = 2R$, dostajemy kolejno:

$$\begin{aligned}
&R = \frac{abc}{b^2 + c^2},\\
&R = \frac{2Rbc}{b^2 + c^2},\\
&b^2 + c^2 = 2bc,\\
&b^2 - 2bc + c^2 = 0,\\
&(b-c)^2 = 0,
\end{aligned}$$

skąd uzyskujemy $b = c$. Zatem jest to trójkąt prostokątny i równoramienny, więc ma on kąty: 45°, 45° i 90°.

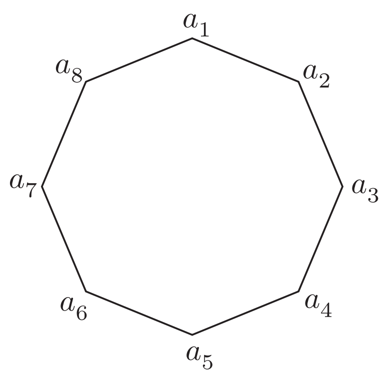
Zadanie 5.

Czy wierzchołki ośmiokąta foremnego można tak ponumerować liczbami: 1, 2, 3, …, 8, aby dla dowolnych trzech jego kolejnych wierzchołków suma ich numerów była co najmniej 14. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Niech przy wierzchołkach tego ośmiokąta stoją kolejno liczby: a_1, a_2, …, a_8. Jeśli spełnione są warunki zadania, to:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &\geqslant 14\\
a_2 + a_3 + a_4 &\geqslant 14\\
a_3 + a_4 + a_5 &\geqslant 14\\
&\vdots\\
a_7 + a_8 + a_1 &\geqslant 14\\
a_8 + a_1 + a_2 &\geqslant 14.
\end{aligned}$$



Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy

$$3(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 + a_8) \geqslant 8 \cdot 14 = 112.$$

A ponieważ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 + a_8 = 1 + 2 + 3 + \dots + 7 + 8 = 36,$$

więc mamy

$$3 \cdot 36 \geqslant 112, \quad \text{czyli} \quad 108 \geqslant 112,$$

a to jest niemożliwe. Zatem nie istnieje ponumerowanie spełniające warunki zadania.

(*tsz*)