

Zadanie 1.

Dla dodatnich liczb całkowitych m i n ($n \geq 2$) działanie ∇ definiujemy wzorem

$$m \nabla n = m + \sqrt[n]{n}.$$

Udowodnij, że prawdziwe są nierówności

$$2022 \nabla 2 > 2021 \nabla 3 > 2020 \nabla 4.$$

Rozwiązanie

Zgodnie z określeniem działania ∇ mamy

$$2022 \nabla 2 = 2022 + \sqrt{2}, \quad 2021 \nabla 3 = 2021 + \sqrt[3]{3}, \quad 2020 \nabla 4 = 2020 + \sqrt[4]{4}.$$

Ponieważ

$$1 + \sqrt{2} > 2 = \sqrt[3]{8} > \sqrt[3]{3} \quad \text{oraz} \quad 1 + \sqrt[3]{3} > 2 > \sqrt{2} = \sqrt[4]{4},$$

więc stąd dostajemy nierówności

$$2022 + \sqrt{2} > 2021 + \sqrt[3]{3} > 2020 + \sqrt[4]{4}.$$

Uwaga. Można zauważyć, że

$$2 > \sqrt{2} > 1, \quad 2 > \sqrt[3]{3} > 1, \quad 2 > \sqrt[4]{4} > 1.$$

Stąd uzyskujemy, że $2024 > 2022 + \sqrt{2} > 2023 > 2021 + \sqrt[3]{3} > 2022 > 2020 + \sqrt[4]{4} > 2021$.

Zadanie 2.

Niech $\overline{abc}$ oznacza trzycyfrową liczbę naturalną o cyfrach różnych od zera, w której a jest cyfrą setek, b – cyfrą dziesiątek, a c – cyfrą jedności. Wykaż, że jeśli liczba $\overline{abc}$ jest podzielna przez 37, to również liczby $\overline{bca}$ i $\overline{cab}$ są podzielne przez 37.

Rozwiązanie

Sposób 1.

Zauważmy, że jeśli $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, to

$$\overline{bca} = 100b + 10c + a = 1000a + 100b + 10c - 999a = 10(100a + 10b + c) - 999a = 10 \cdot \overline{abc} - 999a.$$

Ponieważ — z założenia — liczba $\overline{abc}$ dzieli się przez 37 oraz $999 = 27 \cdot 37$, więc również liczba $\overline{bca}$ dzieli się przez 37. Analogicznie, wykorzystując obliczenia poprzednie

$$\overline{cab} = 10 \cdot \overline{bca} - 999b = 10 \cdot (10 \cdot \overline{abc} - 999a) - 999b = 100 \cdot \overline{abc} - 37 \cdot 270a - 37 \cdot 27b,$$

skąd dostajemy, że również liczba $\overline{cab}$ dzieli się przez 37.

Sposób 2.

Ponieważ liczba $\overline{abc}$ jest podzielna przez 37, więc weźmy pod uwagę zbiór wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 37:

$$\mathcal{A} = \{111, 148, 185, 222, 259, 296, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, \\ 629, 666, 703, 740, 777, 814, 851, 888, 925, 962, 999\}.$$

Z uwagi na założenie, że cyfry tych liczb mają być różne od zera, należy z tego zbioru odrzucić liczby: 370, 407, 703, 740.

Zauważmy, że liczby: 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999 spełniają warunki zadania. Pozostałe liczby zbioru $\mathcal{A}$ dzielimy na poniższe zbiory:

$$\{148, 481, 814\}, \quad \{185, 851, 518\}, \quad \{259, 592, 925\}, \quad \{296, 962, 629\}$$

i jak widać każda trójka liczb spełnia warunki zadania. Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 3.

Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$a+b=c+d \quad \text{ i } \quad a^2+b^2=c^2+d^2.$$

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$a^n+b^n=c^n+d^n.$$

Rozwiązanie

Sposób 1.

Ponieważ $a+b=c+d$, więc $(a+b)^2=(c+d)^2$, czyli

$$a^2+2ab+b^2=c^2+2cd+d^2$$

i wykorzystując drugą równość z treści zadania, dostajemy $ab=cd$.

Zatem

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=c^2-2cd+d^2=(c-d)^2,$$

skąd $a-b=c-d$ lub $a-b=d-c$.

Jeżeli $a+b=c+d$ i $a-b=c-d$, to łatwo wyznaczamy, że $a=c$ i $b=d$,

a jeśli $a+b=c+d$ i $a-b=d-c$, to $a=d$ i $b=c$.

Sprawdzamy teraz bezpośrednio, że w obu przypadkach $a^n+b^n=c^n+d^n$.

Uwaga. Można potraktować równości dane w zadaniu jako układ równań o niewiadomych a i b oraz danych c i d

$$\begin{cases} a+b=c+d \\ a^2+b^2=c^2+d^2, \end{cases}$$

który rozwiązujemy np. metodą podstawiania i otrzymujemy: $(a,b)=(c,d)$ lub $(a,b)=(d,c)$, skąd wynika teza zadania.

Sposób 2.

Zauważmy, że dla liczb rzeczywistych x, y oraz dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$(x^n+y^n)(x+y)=x^{n+1}+y^{n+1}+xy(x^{n-1}+y^{n-1}),$$

a stąd

$$(*) \quad x^{n+1}+y^{n+1}=(x^n+y^n)(x+y)-xy(x^{n-1}+y^{n-1}).$$

W dalszej części rozwiązania zadania wykorzystamy zasadę indukcji matematycznej.

Z treści zadania mamy: $a+b=c+d$ oraz $a^2+b^2=c^2+d^2$. Załóżmy teraz, że dla $n \geq 2$ zachodzą równości

$$a^{n-1}+b^{n-1}=c^{n-1}+d^{n-1} \quad \text{ oraz } \quad a^n+b^n=c^n+d^n.$$

Wykażemy, że $a^{n+1}+b^{n+1}=c^{n+1}+d^{n+1}$. Wykorzystując $(*)$ i założenie oraz równość $ab=cd$ (zobacz sposób 1.), otrzymujemy

$$\begin{aligned} a^{n+1}+b^{n+1} &= (a^n+b^n)(a+b)-ab(a^{n-1}+b^{n-1})= \\ &= (c^n+d^n)(c+d)-cd(c^{n-1}+d^{n-1})=c^{n+1}+d^{n+1}. \end{aligned}$$

Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = 24$. Okrąg ω przechodzi przez punkt C i jest styczny do boku AB w takim punkcie D , że $AD = 3 \cdot BD$. Okrąg ω przecina też boki AC i BC odpowiednio w takich punktach E i F (różnych od C), że $BF = 3$ i $CE = 3\sqrt{3}$. Wyznacz kąty trójkąta ABC .

Rozwiązanie

Ponieważ $AD + BD = 24$ oraz $AD = 3 \cdot BD$, więc $AD = 18$ i $BD = 6$.

Z twierdzenia o stycznych i siecznych okręgu dostajemy

$$BF \cdot BC = BD^2 \quad \text{oraz} \quad AE \cdot AC = AD^2.$$

Zatem $3 \cdot BC = 6^2 = 36$, skąd $BC = 12$

oraz $(AC - 3\sqrt{3}) \cdot AC = 18^2$, a stąd

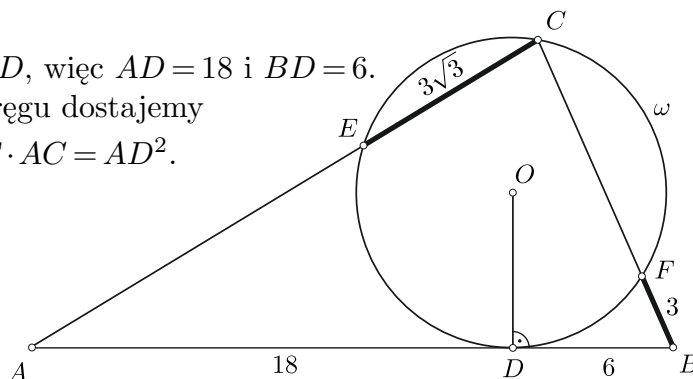
$$AC^2 - 3\sqrt{3} \cdot AC - 324 = 0,$$

którego dodatnim rozwiązaniem jest

$$AC = 12\sqrt{3}.$$

Zauważmy teraz, że $AC^2 + BC^2 = (12\sqrt{3})^2 + 12^2 = 432 + 144 = 576 = 24^2 = AB^2$, a stąd na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Ponieważ też $AB = 24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot BC$, więc $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ oraz $\sphericalangle BAC = 30^\circ$.



Zadanie 5.

W zbiorze $\mathcal{M}$ są wszystkie liczby siedmiocyfrowe zapisane przy pomocy cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i takie, że żadna cyfra w zapisie tych liczb nie powtarza się. Rozstrzygnij, czy w zbiorze $\mathcal{M}$ istnieje takich 5 liczb, że suma trzech z nich jest sumą dwóch pozostałych.

Rozwiązanie

Załóżmy, że w zbiorze $\mathcal{M}$ istnieją liczby: a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 , dla których zachodzi równość

$$(1) \quad a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2.$$

Zauważmy, że dowolna liczba ze zbioru $\mathcal{M}$ ma sumę cyfr równą

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 = 3 \cdot 9 + 1,$$

czyli każda liczba z tego zbioru przy dzieleniu przez 9 daje resztę 1 (dowód tego faktu podajemy na końcu). Stąd suma $a_1 + a_2 + a_3$ przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3, natomiast suma $b_1 + b_2$ przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2. Nie jest więc możliwe, aby równość (1) była spełniona. Zatem w zbiorze $\mathcal{M}$ nie istnieją liczby o jakich mowa w zadaniu.

Uwaga 1. Jest to zadanie nr 210 w: Bolesław Mokrski, Józef Siwy, Tomasz Szymczyk, *Matematyczny sezam*, wydanie drugie, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2018

Uwaga 2. Zamiast rozpatrywania reszt z dzielenia przez 9 można rozpatrywać reszty z dzielenia przez 3. Uzasadnienie wynika z poniższego rozumowania, bo liczba podzielna przez 9 jest też podzielna przez 3.

Dowód faktu, że liczba naturalna i suma jej cyfr przy dzieleniu przez 9 dają tę samą resztę.

Niech będzie dana liczba naturalna

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

której sumą cyfr jest $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

Niech ponadto

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = 9 \cdot p + r_1, \quad p \in \mathbf{N}, \quad r_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

oraz

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 9 \cdot s + r_2, \quad s \in \mathbf{N}, \quad r_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} & \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) = \\ &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) = \\ &= a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1) = a_n \underbrace{\cdot 999 \dots 99}_{n \text{ cyfr}} + a_{n-1} \underbrace{\cdot 999 \dots 99}_{n-1 \text{ cyfr}} + \dots + a_1 \cdot 9 \end{aligned}$$

i liczba ta dzieli się przez 9, więc przez 9 dzieli się również liczba

$$(9 \cdot p + r_1) - (9 \cdot s + r_2) = 9 \cdot (p - s) + (r_1 - r_2),$$

skąd $r_1 - r_2 = 0$, czyli $r_1 = r_2$.

W szczególności liczba naturalna dzieli się przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr tej liczby dzieli się przez 9.

Uwaga. Powyższy dowód można również przeprowadzić używając języka kongruencji. Więcej o kongruencjach można przeczytać np. w:

https://omj.edu.pl/uploads/attachments/seminaria_1.pdf, s. 19-25

(tsz)