
Zadanie 1.

Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^{p+1} + 2$ też jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

Jeżeli $p = 2$, to $p^{p+1} + 2 = 2^3 + 2 = 10$ i jest to liczba złożona.

Jeżeli $p = 3$, to $p^{p+1} + 2 = 3^4 + 2 = 83$ i jest to liczba pierwsza.

Niech teraz $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Jest to liczba nieparzysta i nie jest podzielna przez 3.

Wtedy liczba $p + 1$ jest liczbą parzystą.

Jeżeli $p \equiv 1 \pmod{3}$, to $p^{p+1} \equiv 1 \pmod{3}$ i stąd

$$p^{p+1} + 2 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3},$$

a jeśli $p \equiv 2 \pmod{3}$, czyli $p \equiv -1 \pmod{3}$, to $p^{p+1} \equiv 1 \pmod{3}$, a stąd

$$p^{p+1} + 2 \equiv 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

W obu przypadkach otrzymane liczby są podzielne przez 3 i większe od 3, więc są to liczby złożone. Zatem tylko liczba $p = 3$ spełnia warunki zadania.

Uwaga. Jest to zadanie nr 149 w: Bolesław Mokrski, Józef Siwy, Tomasz Szymczyk, „*Matematyczny sezam*”, wydanie drugie, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2018

Zadanie 2.

Siedmiu sympatyków matematyki, każdy w innym wieku, rozmawiało o matematyce przy ławeczce Stefana Banacha i Ottona Nikodyma na Plantach w Krakowie. Razem mieli 100 lat. Wykaż, że było wśród nich takich trzech, którzy mieli w sumie co najmniej 50 lat.

Rozwiązanie

Przypiszmy kolejnym sympatykom matematyki ich wiek porządkując ich od najmłodszego do najstarszego. Jeżeli przez m_i oznaczmy wiek i -tego sympatyka matematyki, to mamy

$$m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < m_5 < m_6 < m_7.$$

Wykażemy, że trzech najstarszych sympatyków matematyki spełnia warunki zadania.

Jeżeli $m_5 \geq 16$, to $m_6 \geq 17$ i $m_7 \geq 18$, skąd

$$m_5 + m_6 + m_7 \geq 16 + 17 + 18 = 51.$$

Jeśli natomiast $m_5 \leq 15$, to $m_4 \leq 14$, $m_3 \leq 13$, $m_2 \leq 12$ i $m_1 \leq 11$. Wtedy

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \leq 11 + 12 + 13 + 14 = 50,$$

a ponieważ rozmawiający przy ławeczce Banacha i Nikodyma sympatycy matematyki mają razem 100 lat, więc i tym razem

$$m_5 + m_6 + m_7 \geq 50.$$

Zadanie 3.

Punkt M jest punktem przecięcia środkowych trójkąta ABC . Wiedząc, że $AM=60$, $BM=80$ i $CM=100$, oblicz pole trójkąta ABC .

Rozwiązanie

Sposób 1.

Niech A' , B' , C' będą środkami boków trójkąta ABC odpowiednio BC , AC , AB . Ponieważ punkt M dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1 licząc od wierzchołka, więc $CC'=150$ i $MC'=50$.

Niech punkty D i E będą rzutami prostokątnymi punktów odpowiednio A i B na prostą CC' . Ponieważ trójkąty ADC' i BEC' są przystające, więc $AD=BE$ oraz $DC'=EC'$.

Przyjmijmy: $AD=BE=h$ oraz $DC'=EC'=x$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych ADM i BEM , otrzymujemy

$$h^2 = 60^2 - (50 - x)^2$$

$$h^2 = 80^2 + (50 + x)^2,$$

skąd

$$60^2 - (50 - x)^2 = 80^2 - (50 + x)^2.$$

Rozwiązaniem tego równania jest $x=14$. Zatem

$$h^2 = 60^2 - (50 - 14)^2 = 2304,$$

a stąd $h=48$.

Możemy teraz wyznaczyć pole $[ABC]$ trójkąta ABC :

$$[ABC] = [ACC'] + [BCC'] = \frac{1}{2} \cdot CC' \cdot h + \frac{1}{2} \cdot CC' \cdot h = CC' \cdot h = 150 \cdot 48 = 7200.$$

Sposób 2.

Niech P będzie odbiciem symetrycznym punktu M względem środka B' boku AC . Przekątne czworokąta $AMCP$ przecinają się w połowie, więc czworokąt $AMCP$ jest równoległobokiem, w którym:

$$AM = CP = 60, \quad MP = 80, \quad AP = CM = 100.$$

Zauważmy, że

$$AM^2 + MP^2 = 60^2 + 80^2 = 100^2 = AP^2,$$

więc na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa stwierdzamy, że trójkąt AMP jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej AP . Zatem jego pole jest równe

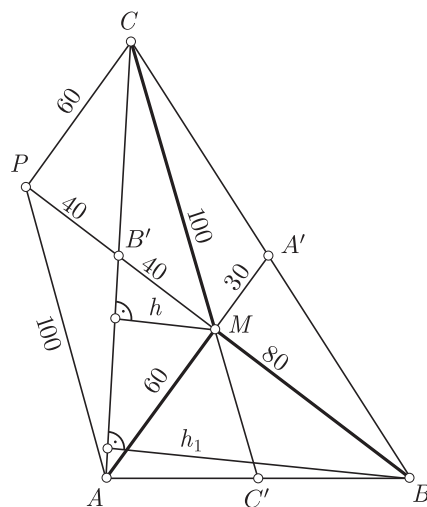
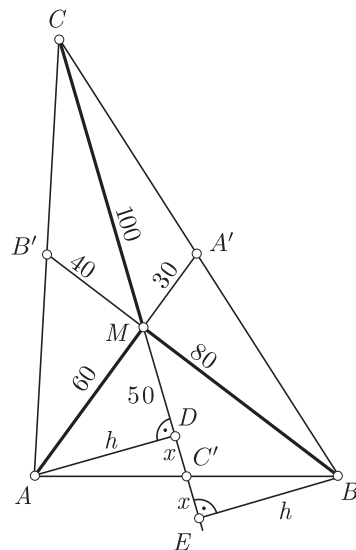
$$[AMP] = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2400,$$

skąd otrzymujemy, że

$$[AMB'] = \frac{1}{2} \cdot [AMP] = 1200,$$

czyli

$$[AMC] = 2 \cdot [AMB'] = 2400.$$



Ponieważ $BB' = 3 \cdot MB'$, więc $h_1 = 3h$. Stąd

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 3h = 3 \cdot [AMC] = 3 \cdot 2400 = 7200.$$

Uwaga. Pole trójkąta AMP można wyznaczyć bez rozstrzygania, że jest to trójkąt prostokątny. Wystarczy skorzystać ze wzoru Herona na pole trójkąta.

Sposób 3.

W tym sposobie wykorzystamy elementy geometrii analitycznej.

Umieścimy trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, aby: $A = (0,0)$, $B = (2b,0)$ i $C = (2c_1, 2c_2)$ dla pewnych liczb rzeczywistych b, c, c_1, c_2 . Ponieważ punkty A', B', C' są środkami boków trójkąta odpowiednio BC, AC, AB , więc

$$A' = (b + c_1, c_2), \quad B' = (c_1, c_2), \quad C' = (b, 0).$$

Wybermy taki punkt B'' , aby zachodziła równość wektorów $\overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{AA'} = [b + c_1, c_2]$, stąd

$$B'' = (b + 2c_1, 2c_2).$$

A ponieważ $\overrightarrow{BB''} = [2c_1 - b, 2c_2]$, więc $\overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{C'C'}$.

Zatem trójkąt $BB'B''$ ma boki równe odpowiednim środkowym trójkąta ABC . Stąd $BB' = 120$, $B'B'' = 90$, $BB'' = 150$.

Z uwagi na równość $120^2 + 90^2 = 150^2$ dostajemy, że trójkąt $BB'B''$ jest prostokątny o przeciwprostokątnej BB''

($\sphericalangle BB'B'' = 90^\circ$). Z równości wektorów $\overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{AA'}$ wynika równoległość odcinków $B'B''$ i AA' i stąd mamy $\sphericalangle BMA' = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle AMB' = 90^\circ$. Zatem

$$[AMB'] = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot MB' = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 40 = 1200.$$

Trójkąty AMB' i CMB' mają równe podstawy AB' i CB' oraz wspólną wysokość poprowadzoną do tych podstaw, więc mają równe pola $[CMB'] = [AMB'] = 1200$. Trójkąt BMA' jest prostokątny, więc

$$[BMA'] = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot MA' = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 30 = 1200,$$

zatem $[CMA'] = [BMA'] = 1200$. Zauważmy, że

$$[ABC] = 2 \cdot [ACA'] = 2([AMB'] + [CMB'] + [CMA']) = 2 \cdot 3 \cdot 1200 = 7200.$$

Sposób 4.

Sposób ten nie wymaga rozważań geometrycznych, ale jest kłopotliwy ze względu na dość złożone obliczenia, w których można łatwo popełnić błąd.

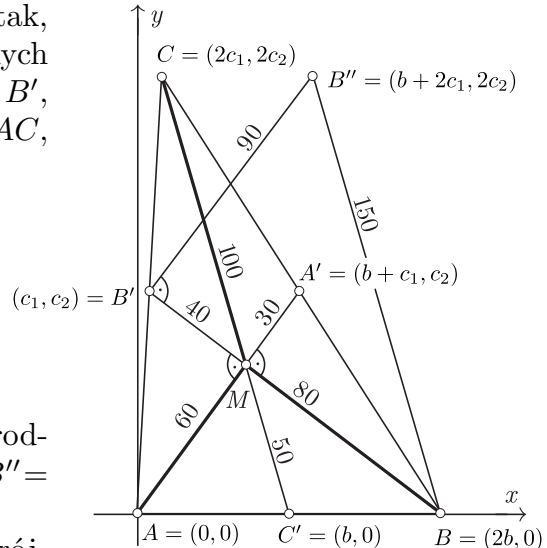
Skorzystamy ze wzoru na długość środkowej w trójkącie. Jeśli trójkąt ma boki długości $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, to środkowa m_a poprowadzona do boku a ma długość

$$(1) \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Ze wzoru (1) dostajemy

$$\begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4m_a^2 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 4m_b^2 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4m_c^2, \end{cases}$$

z którego otrzymujemy



$$\begin{cases} a^2 = \frac{4}{9}(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2) \\ b^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2) \\ c^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2). \end{cases}$$

Przyjmując $m_a = 90$, $m_b = 120$, $m_c = 150$, uzyskujemy $a^2 = 29200$, $b^2 = 20800$, $c^2 = 10000$, a stąd $a = 20\sqrt{73}$, $b = 40\sqrt{13}$, $c = 100$. Wykorzystując wzór Herona na pole trójkąta

$$[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$, dostajemy

$$[ABC] =$$

$$= \sqrt{(10\sqrt{73} + 20\sqrt{13} + 50)(20\sqrt{13} + 50 - 10\sqrt{73})(10\sqrt{73} + 50 - 20\sqrt{13})(10\sqrt{73} + 20\sqrt{13} - 50)}$$

i po nietrudnych, ale dość żmudnych obliczeniach, otrzymujemy, że $[ABC] = 7200$.

Dowód słuszności wzoru (1) pozostawiamy jako dodatkowe ćwiczenie.

Uwaga. Można wykazać (zobacz w: Straszewicz S., *Zadania z olimpiad matematycznych*, tom II. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1961, zadanie nr 81), że ze środkowych dowolnego trójkąta ABC można zbudować trójkąt T i zachodzi zależność między ich polami $[ABC] = \frac{3}{4}[T]$.

Stosując wzór Herona obliczamy pole trójkąta T zbudowanego ze środkowych danego trójkąta ABC

$$[T] = \sqrt{180(180-90)(180-120)(180-150)} = 5400$$

oraz wykorzystując powyższy fakt, otrzymujemy $[ABC] = \frac{4}{3}[T] = 7200$.

Zadanie 4.

Wykaż, że równanie $x^2 - 2019y^2 = 2018$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

Rozwiązanie

Sposób 1.

Zauważmy, że liczba 2019 jest podzielna przez 3 oraz liczba 2018 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Liczba x nie może być podzielna przez 3. W przeciwnym przypadku liczba $x^2 - 2019y^2$ też byłaby podzielna przez 3. Wynikałaby stąd sprzeczność, bo prawa strona równania nie jest podzielna przez 3. Zatem rozwiązań danego równania należy poszukiwać wśród liczb całkowitych x niepodzielnych przez 3.

Jeżeli $x \equiv 1 \pmod{3}$, to $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ i wtedy

$$x^2 - 2019y^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{oraz} \quad 2018 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Jeśli zaś $x \equiv 2 \pmod{3}$, czyli $x \equiv -1 \pmod{3}$, to $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ i jak powyżej uzyskujemy, że

$$x^2 - 2019y^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{oraz} \quad 2018 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Stąd nie istnieją liczby całkowite x i y spełniające dane w zadaniu równanie.

Sposób 2.

Aby wykazać, że równanie

$$(1) \quad x^2 - 2019y^2 = 2018$$

nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych, rozpatrzmy cztery przypadki ze względu na parzystość liczb x i y .

1° Liczby x i y są liczbami parzystymi, czyli $x = 2p$ i $y = 2q$ dla pewnych liczb całkowitych p i q .

Wtedy równanie (1) przyjmuje postać

$$4p^2 - 2019 \cdot 4q^2 = 2018.$$

Zauważmy, że lewa strona otrzymanego równania jest podzielna przez 4, a prawa podzielna nie jest. Zatem ten przypadek zachodzić nie może.

2° Liczba x jest liczbą parzystą i y jest liczbą nieparzystą, czyli $x = 2p$ i $y = 2q + 1$ dla pewnych liczb całkowitych p i q .

Równanie (1) możemy teraz zapisać

$$4p^2 - 2019(4q^2 + 4q + 1) = 2018.$$

Zauważmy, że lewa strona otrzymanego równania jest liczbą nieparzystą i jednocześnie prawa jest liczbą parzystą. Ten przypadek też nie może zachodzić.

3° Liczba x jest liczbą nieparzystą i y jest liczbą parzystą, czyli $x = 2p + 1$ i $y = 2q$ dla pewnych liczb całkowitych p i q .

Wtedy równanie (1) przyjmuje postać

$$(4p^2 + 4p + 1) - 2019 \cdot 4q^2 = 2018,$$

w którym znów lewa strona jest liczbą nieparzystą, a prawa parzystą. Zatem i ten przypadek nie może zachodzić.

4° Liczby x i y są liczbami nieparzystymi, czyli $x = 2p + 1$ i $y = 2q + 1$ dla pewnych liczb całkowitych p i q .

Zatem (1) możemy zapisać

$$(4p^2 + 4p + 1) - 2019(4q^2 + 4q + 1) = 2018.$$

Po równoważnych przekształceniach dostajemy

$$4p^2 + 4p - 2019(4q^2 + 4q) = 2 \cdot 2018$$

$$p^2 + p - 2019(q^2 + q) = 1009$$

$$p(p + 1) - 2019 \cdot q(q + 1) = 1009.$$

Zauważmy, że liczby $p(p + 1)$ i $q(q + 1)$ jako iloczyny dwóch kolejnych liczb całkowitych są liczbami parzystymi, stąd lewa strona ostatniej równości jest liczbą parzystą i jednocześnie prawa jest liczbą nieparzystą, czyli ten przypadek również nie może zachodzić.

Reasumując, nie istnieją liczby całkowite x i y , które spełniają dane w zadaniu równanie.



Zadanie 5.

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8.$$

Rozwiązanie

Sposób 1.

W rozwiązaniu skorzystamy z nierówności $x + \frac{1}{x} \geq 2$ prawdziwej dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x , przy czym równość zachodzi tylko dla $x = 1$. Dowód tego faktu pozostawiamy jako dodatkowe ćwiczenie.

Wymnażając lewą stronę oraz wykorzystując powyższy fakt, dostajemy

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) &= \left(ab + \frac{a}{c} + 1 + \frac{1}{bc}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) = \\ &= abc + b + a + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{abc} = \\ &= \left(abc + \frac{1}{abc}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 4 \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

Sposób 2.

Wykorzystamy teraz zależność $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ między średnią arytmetyczną i geometryczną prawdziwą dla dowolnych dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych x i y .

Na podstawie tej nierówności mamy

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad b + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}, \quad c + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Wymnażając powyższe nierówności stronami, otrzymujemy

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 8.$$

Sposób 3.

W tym sposobie wykorzystamy zależność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla ośmiu nieujemnych liczb rzeczywistych

$$(1) \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8} \geq \sqrt[8]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_8}.$$

Dowód nierówności (1) podamy na końcu rozwiązania tego zadania.

Ponieważ (zobacz sposób 1.)

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) = abc + b + a + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{abc},$$

więc na podstawie (1) dostajemy

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8 \sqrt[8]{abc \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{c} \cdot c \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{abc}} = 8.$$

Przedstawimy teraz dowód nierówności (1).

W dowodzie wykorzystamy zależność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych (zobacz nierówność w sposobie 2.).

Na podstawie tej nierówności dostajemy

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x_1x_2x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

oraz

$$\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4} = \frac{\frac{x_5+x_6}{2} + \frac{x_7+x_8}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_5x_6} + \sqrt{x_7x_8}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x_5x_6x_7x_8}} = \sqrt[4]{x_5x_6x_7x_8},$$

a stąd

$$\begin{aligned} \frac{x_1+x_2+\dots+x_8}{8} &= \frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} + \frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}{2} \geq \frac{\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} + \sqrt[4]{x_5x_6x_7x_8}}{2} \geq \\ &\geq \sqrt{\sqrt[4]{x_1x_2\dots x_8}}} = \sqrt[8]{x_1x_2\dots x_8}. \end{aligned}$$

(tsz)