

XVII Śląski Konkurs Matematyczny

Szkice rozwiązań zadań – zawody rejonowe 2020

Zadanie 1.

Rozwiąż w liczbach wymiernych równanie

$$x^2 - 6y^2 = 2xy.$$

Rozwiązanie:

Niech $x, y \in \mathbb{Q}$ oraz $x^2 - 6y^2 = 2xy$. Mamy wtedy kolejno $x^2 - 2xy = 6y^2$, $x^2 - 2xy + y^2 = 7y^2$ oraz $(x - y)^2 = 7y^2$.

Jeżeli $y = 0$, to $x = 0$.

Jeżeli $y \neq 0$, to $\left(\frac{x-y}{y}\right)^2 = 7$, czyli $\left|\frac{x-y}{y}\right| = \sqrt{7}$, co jest niemożliwe, gdyż $\frac{x-y}{y} \in \mathbb{Q}$.

Zatem jedyną parą spełniającą warunki zadania jest $(0, 0)$.

Zadanie 2.

Wykaż, że jeśli a, b, c są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi takimi, że $\sqrt{ab} \geq 2018$, $\sqrt{bc} \geq 2019$, $\sqrt{ca} \geq 2020$, to

$$a + b + c \geq 6057.$$

Rozwiązanie:

Niech $a, b, c \geq 0$ oraz

$$\sqrt{ab} \geq 2018 \quad \sqrt{bc} \geq 2019 \quad \sqrt{ca} \geq 2020.$$

Wtedy na podstawie nierówności pomiędzy średnimi geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy:

$$a+b+c = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \geq 2018 + 2019 + 2020 = 6057,$$

czyli

$$a + b + c \geq 6057.$$

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie trójki (p, q, r) kolejnych liczb pierwszych, dla których $p^2 + q^2 + r^2$ jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:

Załóżmy, bez straty ogólności, że $p < q < r$.

Na początek wykażemy, że jeżeli $p \neq 3$, $q \neq 3$ i $r \neq 3$, to $3 \nmid p^2 + q^2 + r^2$, a wtedy $p^2 + q^2 + r^2$ nie jest liczbą pierwszą, bo $p^2 + q^2 + r^2 > 3$.

Istotnie, gdy $3 \nmid pqr$, to każda z liczb p, q, r jest postaci $3n+1$, lub $3n+2$, gdzie n jest nieujemną liczbą całkowitą. Kwadrat takiej liczby w dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Stąd

$$p^2 + q^2 + r^2 \equiv 1 + 1 + 1 = 0 \pmod{3}.$$

Wobec tego $p = 3$, lub $q = 3$, lub $r = 3$.

Jeśli $r = 3$, to $q = 2$ i nie ma liczby pierwszej p mniejszej od 2.

Jeśli $q = 3$, to $p = 2$ i $r = 5$, ale wtedy $p^2 + q^2 + r^2 = 4 + 9 + 25 = 38 = 2 \cdot 19$ jest liczbą złożoną.

Jeśli $p = 3$, to $q = 5$ i $r = 7$ i wtedy $p^2 + q^2 + r^2 = 9 + 25 + 49 = 83$ jest liczbą pierwszą.

Oznacza to, że warunki zadania spełnia tylko trójka $(3, 5, 7)$.

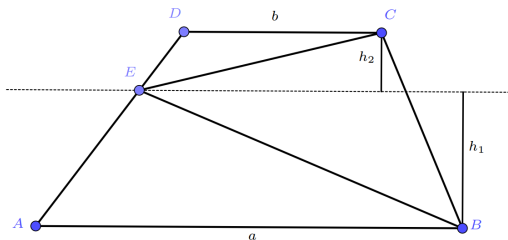
Zadanie 4.

W trapezie $ABCD$, o podstawach AB i CD , wybrano na boku AD dowolnie punkt E . Niech pola trójkątów ABE , CDE i BCE będą równe odpowiednio S_1 , S_2 i T . Wykaż, że

$$T \geq 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

Rozwiązanie:

Niech $AB = a$, $CD = b$, a długości wysokości trójkątów ABE i CDE poprowadzone do podstaw AB i CD są odpowiednio równe h_1 i h_2 .



Pole trapezu $ABCD$ jest sumą pól trójkątów ABE , CDE i BCE , więc

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + T &= \frac{(a+b)(h_1+h_2)}{2} = \frac{ah_1 + ah_2 + bh_1 + bh_2}{2} = \\ &= \frac{ah_1}{2} + \frac{bh_2}{2} + \frac{ah_2 + bh_1}{2} = S_1 + S_2 + \frac{ah_2 + bh_1}{2}, \end{aligned}$$

skąd $T = \frac{ah_2 + bh_1}{2}$.

Na podstawie zależności pomiędzy średnimi arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$T = \frac{ah_2 + bh_1}{2} \geq \sqrt{ah_2 \cdot bh_1} = \sqrt{(ah_1) \cdot (bh_2)} = \sqrt{2S_1 \cdot 2S_2} = 2\sqrt{S_1 S_2},$$

a stąd

$$T \geq 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

Uwaga. Jest to zadanie nr 220 w: Bolesław Mokrski, Józef Siwy, Tomasz Szymczyk, „Matematyczny sezam”, wyd. 2, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2018

Zadanie 5.

Wykaż, że jeśli różne od zera liczby rzeczywiste x , y spełniają równości $x + y = xy = -2016$, to

$$\frac{x \cdot (4 - y^2) + y \cdot (4 - x^2)}{xy} = 2020.$$

Rozwiązanie:

Niech x, y będą różnymi od zera liczbami rzeczywistymi takimi, że

$$x + y = xy = -2016.$$

Wtedy mamy $x + y = -2016$ oraz $x + y = xy$, a zatem

$$\begin{aligned} \frac{x \cdot (4 - y^2) + y \cdot (4 - x^2)}{xy} &= \frac{4x - xy^2 + 4y - x^2y}{xy} = \frac{4(x + y) - xy^2 - x^2y}{xy} = \\ &= \frac{4xy - xy^2 - x^2y}{xy} = \frac{xy(4 - y - x)}{xy} = \\ &= 4 - x - y = 4 - (-2016) = 2020. \end{aligned}$$