Śląski Konkurs Matematyczny
im. Krystyny Skórnik

XXII Śląski Konkurs Matematyczny

21 stycznia 2025 r. **zawody rejonowe** czas: 10:00 – 12:00

1. [6 pkt.] Wykaż, że liczba
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+2023^3+2024^3$$
jest podzielna przez 2025.

2. [6 pkt.] Wyznacz wszystkie funkcje $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie a, b, c, d są liczbami wymiernymi, które spełniają warunki
$$f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2} \quad \text{i} \quad f\left(\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}\,.$$

3. [6 pkt.] Dany jest kwadrat $ABCD$. W jego wnętrzu wybrano taki punkt P, że trójkąt ABP jest równoboczny. Punkty: M, N są środkami odcinków CP, DP, a punkt O jest środkiem danego kwadratu. Wykaż, że trójkąt OMN jest trójkątem równobocznym.

4. [6 pkt.] Liczby a_1, a_2, a_3, …, a_n są dodatnie i $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 8$. Wykaż, że zachodzi nierówność
$$\frac{1}{4}(1+a_1+a_2)(1+a_2+a_3)\cdot\ldots\cdot(1+a_{n-1}+a_n)(1+a_n+a_1) \geqslant 3^n.$$

5. [6 pkt.] Dany jest prostokąt o wymiarach 4×10 podzielony na kwadraty jednostkowe. Każdy mały kwadrat pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że przy dowolnym takim pomalowaniu w prostokącie istnieją takie cztery małe kwadraty jednego koloru, których środki są wierzchołkami prostokąta.

Powodzenia!