XXII Śląski Konkurs Matematyczny

18 marca 2025 r.	**zawody finałowe**	czas: 150 minut

1. [6 pkt.] Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ liczba

$$\underbrace{333\ldots33}_{n \text{ trójek}}\underbrace{222\ldots22}_{n \text{ dwójek}}\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ jedynek}}+2025$$

jest liczbą podzielną przez 12.

2. [6 pkt.] Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, które dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y spełniają równość

$$\frac{1}{2}f(x)f(y)+2=f(x)+f(y)+\frac{1}{2}xy.$$

3. [6 pkt.] Okręgi ω_1 i ω_2 o promieniach odpowiednio R_1 i R_2 są styczne zewnętrznie oraz styczne w dwóch różnych punktach do prostej ℓ. Okrąg ω o promieniu r jest styczny zewnętrznie do okręgów ω_1 i ω_2 oraz do prostej ℓ. Wykaż, że jeśli $r < R_1 \leqslant R_2$, to zachodzi nierówność:

$$r \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{R_1R_2}\,.$$

4. [6 pkt.] W kwadracie $\mathcal{K}$ o boku 12 znajduje się, umieszczonych dowolnie, 77 punktów. Wykaż, że w kwadracie $\mathcal{K}$ istnieje punkt odległy od każdego z tych 77 punktów o więcej niż 0,77.

5. [6 pkt.] Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera i spełniają równość

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}.$$

Wykaż, że $a=b=c$.

Powodzenia!