

Szkice rozwiązań zadań – zawody rejonowe 2026

Zadanie 1.

Dane są takie różne od zera liczby rzeczywiste a, b, c, d , że $b + d \neq 0$ oraz spełniona jest równość

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Wykaż, że $ac < 0$.

Rozwiązanie

Daną w zadaniu równość możemy równoważnie zapisać

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a+c}{b+d},$$

$$(ad+bc)(b+d) = bd(a+c),$$

$$abd + ad^2 + b^2c + bcd = abd + bcd,$$

a stąd

$$(1) \quad ad^2 + b^2c = 0.$$

Założmy teraz, że liczby a, c są tego samego znaku.

Jeśli $a > 0$ i $c > 0$, to również $ad^2 + b^2c > 0$, a jeśli $a < 0$ i $c < 0$, to wtedy $ad^2 + b^2c < 0$. Uzyskane sprzeczności z (1) dowodzą, że liczby a i c są różnych znaków, więc $ac < 0$.

Uwaga. Jest to zadanie nr 220 w: „Mokrski B., Siwy J., Szymczyk T. *Matematyczny sezam — 20 lat Śląskiego Konkursu Matematycznego*. Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2023”

Zadanie 2.

Wysokości h_a, h_b, h_c pewnego trójkąta spełniają równość

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \sqrt{\frac{1}{h_c^2} + \frac{2}{h_a \cdot h_b}}.$$

Wykaż, że jest to trójkąt prostokątny.

Rozwiązanie

Podnosząc daną równość obustronnie do kwadratu, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} \right)^2 = \frac{1}{h_c^2} + \frac{2}{h_a \cdot h_b},$$

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{2}{h_a \cdot h_b} + \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{h_c^2} + \frac{2}{h_a \cdot h_b},$$

skąd

$$(1) \quad \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{h_c^2}.$$

Przyjmijmy, że wysokości h_1, h_b, h_c są w tym trójkącie poprowadzone, odpowiednio, do boków a, b, c . Ze wzoru na pole S tego trójkąta mamy

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a, \quad \text{a stąd} \quad \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}.$$

Analogicznie

$$\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \quad \text{i} \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}.$$

Wstawiając powyższe zależności do (1), dostajemy

$$\frac{a^2}{4S^2} + \frac{b^2}{4S^2} = \frac{c^2}{4S^2},$$

czyli

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że trójkąt ten jest prostokątny.

Zadanie 3.

Michał dzielił pewną liczbę naturalną kolejno przez 5, 10 i 15. Za każdym razem otrzymał z dzielenia niezerową resztę, a suma otrzymanych reszt wynosiła 27. Jaką resztę mógł otrzymać Michał, gdyby dzielił liczbę n przez 30?

Rozwiązanie

Sposób 1.

Niech n będzie liczbą naturalną, którą Michał dzielił kolejno przez 5, 10 i 15. Zatem

$$\begin{aligned} n &= 5p_1 + r_1, & \text{gdzie } p_1 \in \mathbf{Z}, \quad r_1 \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ n &= 10p_2 + r_2, & \text{gdzie } p_2 \in \mathbf{Z}, \quad r_2 \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}, \\ n &= 15p_3 + r_3, & \text{gdzie } p_3 \in \mathbf{Z}, \quad r_3 \in \{1, 2, 3, \dots, 14\}. \end{aligned}$$

Zatem $r_1 + r_2 + r_3 \leq 4 + 9 + 14 = 27$. A skoro $r_1 + r_2 + r_3 = 27$, więc musi być

$$r_1 = 4, \quad r_2 = 9, \quad r_3 = 14.$$

Jeśli Michał dzieliłby liczbę n przez 30, to

$$n = 30p + r, \quad \text{gdzie } p \in \mathbf{Z}, \quad r \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 29\}.$$

Ponieważ

$$3n = 3(10p_2 + 9) = 30p_2 + 27 \quad \text{oraz} \quad 2n = 2(15p_3 + 14) = 30p_3 + 28,$$

więc

$$n = 3n - 2n = (30p_2 + 27) - (30p_3 + 28) = 30(p_2 - p_3 - 1) + 30 + 27 - 28 = 30p + 29,$$

gdzie $p = p_2 - p_3 - 1 \in \mathbf{Z}$. Zatem z dzielenia liczby n przez 30 Michał otrzymałby resztę $r = 29$.

Sposób 2.

Jak w sposobie 1. stwierdzamy, że liczba n przy dzieleniu przez 5, 10, 15 daje reszty, odpowiednio, 4, 9, 14.

Niech A_k^r oznacza zbiór liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez k dają resztę r . Zatem

$$A_5^4 = \{4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, \dots\},$$

$$A_{10}^9 = \{9, 19, 29, 39, 49, 59, \dots\},$$

$$A_{15}^{14} = \{14, 29, 44, 59, 74, 89, \dots\}.$$

Z treści zadania wnosimy, że liczba n musi należeć do każdego z tych zbiorów, czyli do ich części wspólnej. Zatem

$$n \in A_5^4 \cap A_{10}^9 \cap A_{15}^{14} = \{29, 59, 89, 119, \dots\}.$$

Wszystkie liczby z tego zbioru spełniają warunki zadania i przy dzieleniu przez 30 dają resztę 29. Taką też resztę otrzymałby Michał z dzielenia liczby n przez 30.

Sposób 3.

Jak w sposobie 1. stwierdzamy, że liczba n przy dzieleniu przez 5, 10, 15 daje reszty, odpowiednio, 4, 9, 14. Fakt ten możemy zapisać

$$n - 4 = 5p_1, \quad n - 9 = 10p_2, \quad n - 14 = 15p_3,$$

gdzie $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{Z}$. Stąd

$$3n - 27 = 30p_2 \quad \text{ i } \quad 2n - 28 = 30p_3.$$

Odejmując stronami otrzymane równości, dostajemy

$$(3n - 27) - (2n - 28) = 30p_2 - 30p_3, \\ n + 1 = 30(p_2 - p_3).$$

Zatem liczba $n + 1$ dzieli się przez 30, więc

$$n + 1 \in \{30, 60, 90, 120, \dots\},$$

skąd dostajemy, że

$$n \in \{29, 59, 89, 119, \dots\}.$$

Wszystkie liczby powyższego zbioru spełniają warunki zadania oraz przy dzieleniu przez 30 dają resztę 29, więc taką resztę otrzymałby Michał.

Zadanie 4.

Punkt E jest punktem boku BC prostokąta $ABCD$, przy czym $CE = 2 \cdot BE$. Odcinki BD i AE przecinają się w punkcie P . Wyznacz pole czworokąta $CDPE$, jeśli pole trójkąta ABP jest równe 15.

Rozwiązanie

Niech $[XYZ\dots]$ oznacza pole wielokąta $[XYZ\dots]$.

Sposób 1.

Przyjmijmy, że $[BEP] = p$.

Zauważmy, że trójkąty DAP i BEP mają takie same kąty, więc są to trójkąty podobne. Ponieważ

$$AD = BC = 3 \cdot BE,$$

wiec są to trójkąty podobne w skali $k = 3$. Jeśli więc $[BEP] = p$, to $[DAP] = 9p$.

Zauważmy też, że trójkąty BEP i CEP mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka P . A ponieważ też $CE = 2 \cdot BE$, więc $[CEP] = 2 \cdot [BEP] = 2p$. Przyjmijmy również, że $[CDP] = S$.

Ponieważ $BE = \frac{1}{3} \cdot BC$, więc

$$[ABE] = \frac{1}{6} \cdot [ABCD], \quad \text{skąd} \quad [AECD] = \frac{5}{6} \cdot [ABCD].$$

Zatem $[AECD] = 5 \cdot [ABE]$, czyli

$$11p + S = 5(p + 15),$$

$$11p + S = 5p + 75,$$

$$6p + S = 75.$$

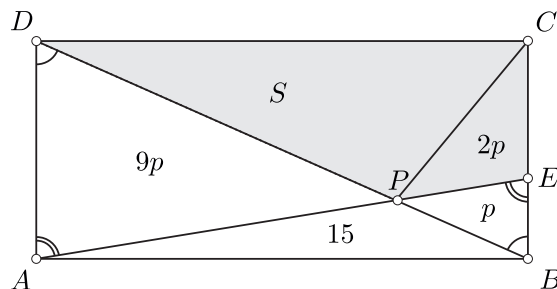
Przekątna prostokąta dzieli jego pole na połowy, więc również zachodzi równość

$$9p + 15 = S + 3p, \quad \text{czyli} \quad 6p + 15 = S.$$

Z układu równań

$$\begin{cases} 6p + S = 75 \\ 6p + 15 = S \end{cases}$$

otrzymujemy: $S = 45$ i $p = 5$. Stąd $[CDPE] = [CDP] + [CEP] = S + 2p = 45 + 10 = 55$.



Sposób 2.

W tym sposobie wykorzystamy metodę geometrii analitycznej.

Umieścimy nasz prostokąt w układzie współrzędnych tak, aby: $A = (0,0)$, $B = (a,0)$, $C = (a,3b)$, $D = (0,3b)$ dla pewnych dodatnich liczb a, b . Wtedy $E = (a,b)$.

Prosta AE ma równanie $y = \frac{b}{a}x$. Natomiast

prosta BD ma równanie $y = -\frac{3b}{a}x + 3b$.

Z układu równań

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{3b}{a}x + 3b \end{cases}$$

wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia się tych prostych i dostajemy $P = \left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{4}b\right)$.

Ponieważ pole trójkąta ABP jest równe 15, więc

$$[ABP] = \frac{1}{2}AB \cdot PQ = \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{4}b = \frac{3}{8}ab = 15,$$

skąd dostajemy, że $ab = 40$. Zatem pole prostokąta $ABCD$ jest równe $[ABCD] = a \cdot 3b = 3ab = 120$.

Zauważmy, że $PM = \frac{3}{4}a$, więc

$$[ADP] = \frac{1}{2}AD \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot 3b \cdot \frac{3}{4}a = \frac{9}{8}ab = 45.$$

Ponieważ $PM = \frac{3}{4}a$, więc $PN = \frac{1}{4}a$. Możemy teraz wyznaczyć pole trójkąta BEP :

$$[BEP] = \frac{1}{2}BE \cdot PN = \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{8}ab = 5.$$

Zatem

$$[CDPE] = [ABCD] - [ABP] - [ADP] - [BEP] = 120 - 15 - 45 - 5 = 55.$$

Sposób 3.

W sposobie tym, podobnie jak w sposobie 1., wykorzystamy podobieństwo trójkątów.

Przyjmijmy: $AB = a$, $AD = 3b$, $BE = \frac{1}{3}BC = b$ dla pewnych dodatnich liczb a, b . Niech punkty

M, N, Q będą rzutami prostokątnymi punktu P na boki, odpowiednio, AD, BC, AB .

Przyjmijmy też: $BQ = x$, $PQ = y$. Wtedy $AQ = a - x$.

Zauważmy, że trójkąty ABD i QBP są podobne, więc

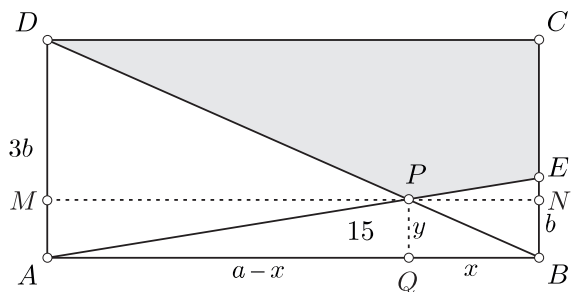
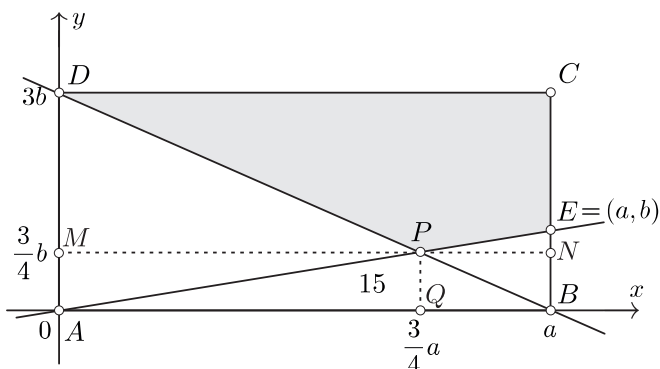
$$\frac{AD}{AB} = \frac{QP}{QB}, \quad \text{czyli} \quad \frac{3b}{a} = \frac{y}{x}.$$

Analogicznie podobne są trójkąty ABE i AQP , skąd dostajemy

$$\frac{BE}{AB} = \frac{QP}{AQ}, \quad \text{czyli} \quad \frac{b}{a} = \frac{y}{a-x}.$$

Z układu równań

$$\begin{cases} \frac{3b}{a} = \frac{y}{x} \\ \frac{b}{a} = \frac{y}{a-x} \end{cases}$$



dostajemy $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{3}{4}b$ oraz $a - x = \frac{3}{4}a$. Ponieważ pole trójkąta ABP jest równe 15, więc

$$\frac{1}{2}AB \cdot PQ = \frac{1}{2}a \cdot y = \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{4}b = \frac{3}{8}ab = 15,$$

a stąd $ab = 40$.

Możemy teraz wyznaczyć pola prostokąta $ABCD$ oraz trójkątów ADP i BCP :

$$[ABCD] = AB \cdot AD = a \cdot 3b = 120,$$

$$[ADP] = \frac{1}{2}AD \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot 3b \cdot \frac{3}{4}a = \frac{9}{8}ab = 45,$$

$$[BEP] = \frac{1}{2}BE \cdot PN = \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{8}ab = 5.$$

Zatem pole czworokąta $CDPE$ jest równe

$$[CDPE] = [ABCD] - [ADP] - [ABP] - [BEP] = 120 - 45 - 15 - 5 = 55.$$

Zadanie 5.

Na stole leży 55 żetonów. Jaś i Małgosia grają w następującą grę: pierwsza osoba bierze ze stołu jeden, dwa, trzy albo cztery żetony, następnie druga bierze jeden, dwa, trzy albo cztery żetony i tak dalej na przemian. Wygrywa ten, kto wziął ze stołu ostatni żeton. Wyjaśnij, kto z nich może zapewnić sobie wygraną w tej grze, gdy grę rozpoczyna Jaś.

Rozwiązanie

W powyższej grze zawsze może wygrać Małgosia. Jeśli w jednym ruchu Jaś weźmie p żetonów, gdzie $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, to wystarczy, że teraz Małgosia weźmie $5 - p$ żetonów. Zatem w jednej kolejce Jaś i Małgosia wezmą razem 5 żetonów. Skoro liczba żetonów jest podzielna przez 5, więc po 11 kolejkach ostatni żeton weźmie Małgosia.

(tsz)