Szkice rozwiązań zadań – zawody rejonowe 2025

Zadanie 1.

Wykaż, że liczba

$$1^3+2^3+3^3+\dots+2023^3+2024^3$$

jest podzielna przez 2025.

Rozwiązanie

Sposób 1.

W rozwiązaniu skorzystamy ze wzoru $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, który jest prawdziwy dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b. Ze wzoru tego wynika, że jeśli a, b są takimi liczbami całkowitymi, że $a+b\neq 0$, to suma a^3+b^3 jest podzielna przez $a+b$.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Liczba składników danej w zadaniu sumy jest parzysta, więc składniki te możemy pogrupować po dwa

(1) $$1^3+2^3+3^3+\dots+2023^3+2024^3=(1^3+2024^3)+(2^3+2023^3)+\dots+(1012^3+1013^3).$$

Wyrażenia w nawiasach są postaci a^3+b^3, gdzie $a+b=2025$, więc — na podstawie uwagi powyżej — każde z nich jest podzielne przez 2025, a stąd otrzymujemy, że ich suma (1) również jest podzielna przez 2025. Kończy to rozwiązanie zadania.

Sposób 2.

W sposobie tym wykorzystamy wzór na sumę sześcianów wszystkich liczb całkowitych od 1 do n:

(2) $$1^3+2^3+3^3+\dots+(n-1)^3+n^3=(1+2+3+\dots+(n-1)+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Ze wzoru tego wynika, że

$$1^3+2^3+3^3+\dots+2023^3+2024^3=(1+2+3+\dots+2023+2024)^2=\left(\frac{2024\cdot 2025}{2}\right)^2=$$

$$=(1012\cdot 2025)^2=1012^2\cdot 2025^2,$$

czyli liczba ta jest podzielna przez 2025^2 i tym bardziej przez 2025.

Uwaga. Wzór (2) można udowodnić na przykład stosując *zasadę indukcji matematycznej.*

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie funkcje $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie a, b, c, d są liczbami wymiernymi, które spełniają warunki

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2} \quad \text{i} \quad f\left(\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}.$$

Rozwiązanie

Z warunku $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$ otrzymujemy

$$4+2a\sqrt{2}+2b+c\sqrt{2}+d=\sqrt{2},$$

skąd po przekształceniach

(1) $$(2a+c-1)\sqrt{2}=-(4+2b+d).$$

Gdyby było $2a+c-1\neq 0$, to mielibyśmy

$$\sqrt{2}=-\frac{4+2b+d}{2a+c-1}.$$

Ponieważ liczby a, b, c, d są liczbami wymiernymi, więc oznaczałoby to, że liczba $\sqrt{2}$ też byłaby liczbą wymierną, a tak nie jest. Zatem dostajemy, że

(2) $$2a+c-1=0 \text{ i stąd oraz (1) też } 4+2b+d=0.$$

Analogicznie, jak powyżej, z warunku $f\left(\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}$ uzyskujemy równości

(3) $$5a+c-1=0 \quad \text{oraz} \quad 25+5b+d=0.$$

Z (2) i (3) otrzymujemy układy równań

$$\begin{cases} 2a+c-1=0 \\ 5a+c-1=0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} 4+2b+d=0 \\ 25+5b+d=0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem pierwszego z tych układów jest para $a=0$, $c=1$, a rozwiązaniem drugiego para $b=-7$, $d=10$.

Stąd funkcją spełniającą warunki zadania może być jedynie funkcja określona wzorem

$$f(x)=x^4-7x^2+x+10.$$

Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że tak jest istotnie:

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^4-7\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)+10=4-7\cdot 2+\sqrt{2}+10=\sqrt{2}$$

oraz

$$f\left(\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^4-7\left(\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}+10=25-7\cdot 5+\sqrt{5}+10=\sqrt{5}.$$

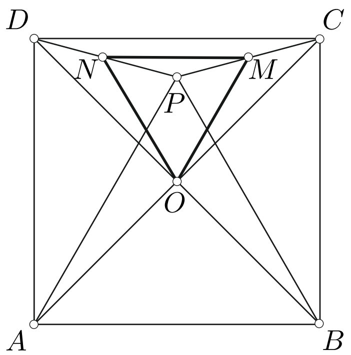
Zadanie 3.

Dany jest kwadrat $ABCD$. W jego wnętrzu wybrano taki punkt P, że trójkąt ABP jest równoboczny. Punkty: M, N są środkami odcinków CP, DP, a punkt O jest środkiem danego kwadratu. Wykaż, że trójkąt OMN jest trójkątem równobocznym.

Rozwiązanie

Sposób 1.

W rozwiązaniu skorzystamy z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta: *Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest połową długości boku trzeciego.*



Punkty M i N są środkami boków CP i DP trójkąta CDP, więc

$$MN=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB.$$

Punkty O i M są środkami boków AC i CP trójkąta ACP, skąd

$$OM=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}AB,$$

a punkty O i N są środkami boków BD DP trójkąta BDP. Stąd

$$ON=\frac{1}{2}BP=\frac{1}{2}AB.$$

Z powyższych równości dostajemy

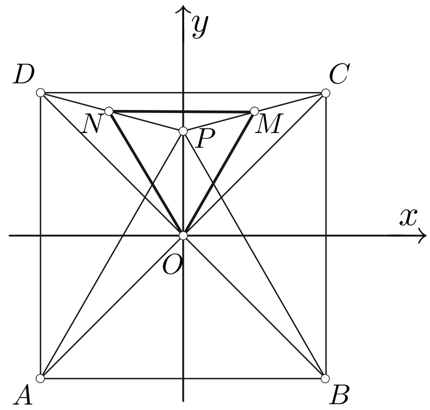
$$MN=OM=ON,$$

więc trójkąt OMN jest równoboczny, a to mieliśmy wykazać.

Sposób 2.

W tym sposobie wykorzystamy metodę geometrii analitycznej. Umieśćmy kwadrat w układzie współrzędnych tak, aby jego środek pokrywał się z początkiem układu współrzędnych, czyli $O=(0,0)$.

Przyjmując (dla łatwiejszych obliczeń), że długość boku kwadratu jest równa 4, otrzymujemy współrzędne pozostałych punktów: $A=(-2,-2)$, $B=(2,-2)$, $C=(2,2)$, $D=(-2,2)$ oraz $P=(0,2\sqrt{3}-2)$.



Wykorzystując wzory na współrzędne środka S odcinka AB:

$$x_S=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_S=\frac{y_A+y_B}{2},$$

otrzymujemy

$$x_M=\frac{x_P+x_C}{2}=\frac{0+2}{2}=1,$$

$$y_M=\frac{y_P+y_C}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2+2}{2}=\sqrt{3},$$

czyli $M=(1,\sqrt{3})$. Analogicznie dostajemy, że $N=(-1,\sqrt{3})$.

Ze wzoru $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ na długość odcinka AB dostajemy

$$MN=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}=\sqrt{(1+1)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=2,$$

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,$$

$$ON=\sqrt{(x_N-x_O)^2+(y_N-y_O)^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2.$$

Stąd $MN=OM=ON$, czyli trójkąt OMN jest równoboczny.

Uwaga. Można kwadrat umieścić w układzie współrzędnych też tak, aby: $A=(0,0)$, $B=(4,0)$, $C=(4,4)$, $D=(0,4)$. Wtedy $O=(2,2)$, $P=(2,2\sqrt{3})$.

Zadanie 4.

Liczby a_1, a_2, a_3, …, a_n są dodatnie i $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=8$. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{4}(1+a_1+a_2)(1+a_2+a_3)\cdot\ldots\cdot(1+a_{n-1}+a_n)(1+a_n+a_1)\geqslant 3^n.$$

Rozwiązanie

Z zależności

$$\frac{1+a_i+a_j}{3}\geqslant\sqrt[3]{1\cdot a_i\cdot a_j}\quad\text{czyli}\quad 1+a_i+a_j\geqslant 3\sqrt[3]{a_ia_j}$$

między średnią arytmetyczną a geometryczną, zastosowanej do trzech liczb dodatnich: 1, a_i, a_j, otrzymujemy kolejno:

$$(1+a_1+a_2)\geqslant 3\sqrt[3]{a_1a_2},$$

$$(1+a_2+a_3)\geqslant 3\sqrt[3]{a_2a_3},$$

$$\vdots$$

$$(1+a_{n-1}+a_n)\geqslant 3\sqrt[3]{a_{n-1}a_n},$$

$$(1+a_n+a_1)\geqslant 3\sqrt[3]{a_na_1}.$$

Mnożąc powyższe nierówności stronami (w każdej obie strony są dodatnie), dostajemy

$$(1+a_1+a_2)(1+a_2+a_3)\cdot\ldots\cdot(1+a_{n-1}+a_n)(1+a_n+a_1)\geqslant 3^n\sqrt[3]{(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^2}=$$
$$=3^n\sqrt[3]{64}=4\cdot 3^n,$$

skąd uzyskujemy tezę

$$\frac{1}{4}(1+a_1+a_2)(1+a_2+a_3)\cdot\ldots\cdot(1+a_{n-1}+a_n)(1+a_n+a_1)\geqslant 3^n.$$

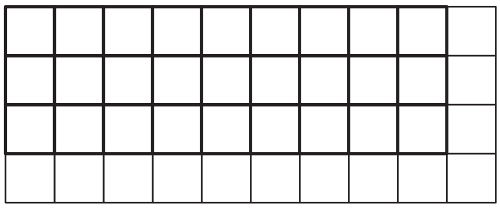
Tak naprawdę zachodzi nierówność ostra. Gdyby miała zachodzić równość, to wszystkie liczby musiałyby być równe i jednocześnie równe 1. Wtedy jednak nie byłoby spełnione założenie $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=8$.

Zadanie 5.

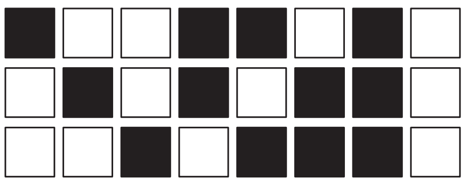
Dany jest prostokąt o wymiarach 4×10 podzielony na kwadraty jednostkowe. Każdy mały kwadrat pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że przy dowolnym takim pomalowaniu w prostokącie istnieją takie cztery małe kwadraty jednego koloru, których środki są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie

Wewnątrz danego prostokąta wybierzmy prostokąt o wymiarach 3×9 (zobacz rysunek).



Każdą kolumnę wybranego prostokąta można pomalować na 8 różnych sposobów (zobacz rysunek).



Ponieważ wybraliśmy prostokąt o 9 kolumnach, więc muszą być wśród nich dwie pomalowane jednakowo. Każda taka kolumna ma co najmniej dwa kwadraty w tym samym kolorze. Zatem w wybranych 9 kolumnach istnieją cztery kwadraty pomalowane tym samym kolorem, których środki są wierzchołkami prostokąta.

Uwaga. Jest to zadanie nr 265 w: Mokrski B., Siwy J., Szymczyk T., *Matematyczny sezam. 20 lat Śląskiego Konkursu Matematycznego.* Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2023

(*tsz*)