Szkice rozwiązań zadań — zawody rejonowe 2023

Zadanie 1.

Rozstrzygnij, czy liczba $\underbrace{111\ldots11}_{2023\text{ jedynki}}$ jest kwadratem liczby całkowitej

Rozwiązanie

Liczba $\underbrace{111\ldots11}_{2023\text{ jedynki}}$ jest liczbą nieparzystą, więc jeśli jest kwadratem liczby całkowitej, to jest kwadratem liczby nieparzystej. Zauważmy, że kwadrat liczby nieparzystej przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Wynika to z równości

$$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1,$$

która jest prawdziwa dla każdej liczby całkowitej k. Jednak

$$\underbrace{111\ldots11}_{2023\text{ jedynki}} = \underbrace{111\ldots11}_{2021\text{ jedynek}}00+11 = \underbrace{111\ldots11}_{2021\text{ jedynek}}\cdot 4\cdot 25+4\cdot 2+3,$$

więc liczba dana w zadaniu, jako suma dwóch liczb podzielnych przez 4 oraz liczby 3, przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Zatem nie jest ona kwadratem liczby całkowitej.

Zauważmy też, że z równości

$$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1$$

wynika, że kwadrat liczby nieparzystej przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1. Jest tak, bo dla każdej liczby całkowitej k iloczyn $k(k+1)$, jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych, dzieli się przez 2, czyli

$$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1 = 8p+1$$

dla liczby całkowitej p. Jednak

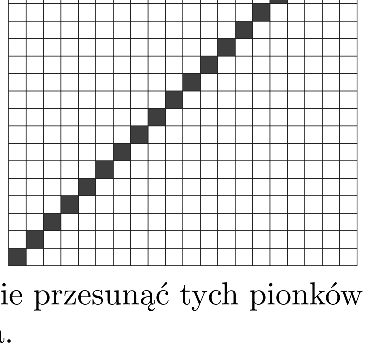
$$\underbrace{111\ldots11}_{2023\text{ jedynki}} = \underbrace{111\ldots11}_{2020\text{ jedynek}}000+111 = \underbrace{111\ldots11}_{2020\text{ jedynek}}\cdot 8\cdot 125+8\cdot 13+7,$$

a to oznacza, że liczba dana w zadaniu przy dzieleniu przez 8 daje resztę 7, więc nie może być kwadratem nieparzystej liczby całkowitej.

Zadanie 2.

Dana jest szachownica 20×20. Na jej głównej przekątnej stoją pionki — po jednym na każdym polu. Michał może w jednym ruchu zmienić położenie dokładnie trzech dowolnie wybranych pionków w taki sposób, że każdy z nich przesuwa dokładnie o jedno pole w dół. Rozstrzygnij, czy Michał może za pomocą tych operacji przesunąć wszystkie pionki do najniższego rzędu szachownicy.

Rozwiązanie



Zauważmy, że aby przesunąć, zgodnie z warunkami zadania, wszystkie pionki stojące na głównej przekątnej tej szachownicy do jej najniższego rzędu, Michał musi wykonać

$$0+1+2+3+\cdots+18+19 = \frac{0+19}{2}\cdot 20 = 190$$

przesunięć pionków. Ponieważ w jednym ruchu Michał zmienia położenie trzech pionków, więc po każdym ruchu liczba wykonanych przesunięć pionków jest liczbą podzielną przez 3. Jednak liczba 190 nie dzieli się przez 3. Zatem Michał nie jest w stanie przesunąć tych pionków do najniższego rzędu, wykonując ruchy zgodnie z warunkami zadania.

Zadanie 3.

Wykaż, że dla dowolnych, dodatnich liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{(a+1)^2+(b+2)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{5}\,.$$

Rozwiązanie

Sposób 1.

Daną nierówność będziemy przekształcać równoważnie. Ponieważ obie strony nierówności są nieujemne, więc możemy podnieść ją obustronnie do kwadratu i otrzymamy wtedy nierówność

$$(a+1)^2+(b+2)^2 \leqslant a^2+b^2+2\sqrt{5(a^2+b^2)}+5.$$

Po dalszych przekształceniach możemy zapisać:

$$a^2+2a+1+b^2+4b+4 \leqslant a^2+b^2+2\sqrt{5(a^2+b^2)}+5,$$

$$2a+4b \leqslant 2\sqrt{5(a^2+b^2)}\,,$$

$$a+2b \leqslant \sqrt{5(a^2+b^2)}\,.$$

W dalszym ciągu obie strony otrzymanej nierówności są nieujemne, więc jeszcze raz podnosimy ją obustronnie do kwadratu i dostajemy nierówność

$$(a+2b)^2 \leqslant 5(a^2+b^2),$$

$$a^2+4ab+4b^2 \leqslant 5a^2+5b^2$$

lub równoważnie $(2a-b)^2 \geqslant 0$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc nierówność dana w zadaniu, równoważna ostatniej, też jest prawdziwa.

Uwaga. Nierówność $a+2b \leqslant \sqrt{5(a^2+b^2)}$ jest prawdziwa na podstawie nierówności Schwarza. O nierówności tej można przeczytać np. w: Szymczyk T., *Nierówność Schwarza*, w: II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów 2006/2007. Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2009.

Sposób 2.

Rozpatrzmy wektory:

$$\overrightarrow{x}=[a,b],\quad \overrightarrow{y}=[1,2]\quad \text{oraz}\quad \overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=[a+1,b+2].$$

Korzystając ze wzoru na długość wektora w układzie współrzędnych oraz zależności

$$|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}| \leqslant |\overrightarrow{x}|+|\overrightarrow{y}|,$$

która jest prawdziwa dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{x}$ i $\overrightarrow{y}$, otrzymujemy

$$\sqrt{(a+1)^2+(b+2)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{1^2+2^2}\,,$$

czyli nierówność, którą mieliśmy udowodnić.

Uwaga 1. Nierówność dana w zadaniu jest szczególnym przypadkiem nierówności

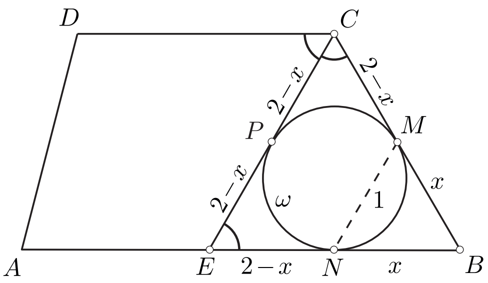
$$\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{1}$$

Jeśli weźmiemy wektory: $\overrightarrow{p}=[a,b]$, $\overrightarrow{q}=[x,y]$ oraz $\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}=[a+x,b+y]$, to nierówność (1) przedstawia zależność $|\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}| \leqslant |\overrightarrow{p}|+|\overrightarrow{q}|$.

Uwaga 2. Nierówność dana w zadaniu jest prawdziwa bez dodatkowego założenia, że liczby a, b są dodatnie.

Zadanie 4.
Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ oraz kąt BCD jest kątem rozwartym. Dwusieczna kąta BCD przecina prostą AB w punkcie E. Okrąg ω wpisany w trójkąt BCE jest styczny do boków BC i BE w punktach odpowiednio M i N. Wyznacz miarę kąta BCD, jeśli $BC=2$ i $MN=1$

Rozwiązanie



Ponieważ CE zawiera się w dwusiecznej kąta BCD, więc $\sphericalangle BCE = \sphericalangle DCE$. Również $\sphericalangle DCE = \sphericalangle BEC$, bo są to kąty naprzemianległe. Z równości

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle BCE = \sphericalangle BEC$$

wynika, że trójkąt BCE jest równoramienny, w którym $BC=BE=2$. Zatem okrąg ω jest styczny do boku CE trójkąta BCE w takim punkcie P, że $CP=PE$.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu otrzymujemy:

$$BM=BN, \quad CM=CP, \quad EN=EP.$$

Przyjmijmy $BM=x$. Wtedy

$$BN=x, \quad CM=CP=2-x, \quad EN=PE=2-x.$$

Ponieważ $\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{BC}{BE}$, więc na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa dostajemy, że $MN \parallel CE$. Zatem trójkąty BMN i BCE są podobne. Stąd

$$\frac{BM}{MN}=\frac{BC}{CE},$$

$$\frac{x}{1}=\frac{2}{4-2x}.$$

Otrzymane równanie jest równoważne równaniu $2x^2-4x+2=0$, skąd $x=1$, czyli $CE=4-2=2$. Oznacza to, że trójkąt BCE jest równoboczny, więc $\sphericalangle BCE=60^\circ$ i stąd $\sphericalangle BCD=2\cdot 60^\circ=120^\circ$.

Zadanie 5.
Rozwiąż równanie

$$\lfloor x\rfloor \cdot \{x\}=x.$$

Uwaga. Symbol $\lfloor a\rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby rzeczywistej a oraz $\{a\}=a-\lfloor a\rfloor$.

Rozwiązanie

Ponieważ $\lfloor x\rfloor \leqslant x$ i $0\leqslant \{x\}<1$, więc dla liczb $x\geqslant 1$ prawdziwe są nierówności

$$\lfloor x\rfloor \cdot \{x\} < \lfloor x\rfloor \leqslant x,$$

czyli w tym przypadku równanie nie ma rozwiązania.
Jeśli $0<x<1$, to $\lfloor x\rfloor=0$. Również w tym przypadku równanie nie ma rozwiązania.
Załóżmy teraz, że $x\leqslant 0$. Ponieważ $\lfloor x\rfloor+\{x\}=x$, więc dane równanie przyjmuje postać

$$\lfloor x\rfloor \cdot \{x\} = \lfloor x\rfloor + \{x\},$$

a stąd

$$\{x\}=\frac{\lfloor x\rfloor}{\lfloor x\rfloor-1}.$$

Przyjmując $\lfloor x\rfloor=-n$, gdzie $n\in \mathbf{N}\cup\{0\}$, mamy

$$\{x\}=\frac{-n}{-n-1}=\frac{n}{n+1}.$$

Zatem

(1) $$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = -n + \frac{n}{n+1} = -\frac{n^2}{n+1}, \quad \text{gdzie} \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że każda liczba x określona w (1) jest rozwiązaniem danego równania.

Uwaga. Jest to zadanie nr 182 w: Mokrski B., Siwy J., Szymczyk T., *Matematyczny sezam. 15 lat Ślaskiego Konkursu Matematycznego*. Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2018.

(tsz)