

Szkice rozwiązań zadań - zawody finałowe 2026

Zadanie 1.

Niech $\overline{xyz\dots}$ oznacza liczbę naturalną, której kolejnymi cyframi zapisu dziesiętnego są: $x, y, z, \dots$

Wyznacz najmniejszą czterocyfrową liczbę naturalną $\overline{abcd}$, dla której spełniona jest równość

$$\overline{abcd} = \overline{abc} \cdot d + a \cdot \overline{bcd}.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że musi być $a \neq 0$, bo jest to pierwsza cyfra w liczbie. Skoro szukamy najmniejszej liczby $\overline{abcd}$, więc będziemy sprawdzać najmniejsze możliwe cyfry a . Rozpoczynamy od $a = 1$. Wtedy będzie zachodziła równość

$$\overline{1bcd} = \overline{1bc} \cdot d + 1 \cdot \overline{bcd},$$

czyli

$$1000 + \overline{bcd} = \overline{1bc} \cdot d + \overline{bcd},$$

$$1000 = \overline{1bc} \cdot d.$$

Ponieważ $\overline{1bc} < 200$, więc musi być $d > 5$. Spośród liczb $d \in \{6, 7, 8, 9\}$ tylko $d = 8$ jest dzielnikiem liczby 1000. Stąd $\overline{1bc} = 125$ i $d = 8$, czyli szukaną liczbą jest $\overline{abcd} = \mathbf{1258}$. Ponieważ z cyfrą $a = 1$ jest tylko jedna liczba spełniająca warunki zadania, więc jest to poszukiwana liczba.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie trójki (p, q, n) , gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a n jest liczbą naturalną, które spełniają równanie

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{11}{pq} = \frac{1}{n}.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli trójka (p, q, n) spełnia podane równanie, to równanie to spełnia też trójka (q, p, n) . Na początku będziemy poszukiwali takich trójek, w których $p \leq q$.

Przekształcając równoważnie podaną równość, otrzymujemy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{11}{pq} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{q + p + 11}{pq} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{pq}{p + q + 11} = n.$$

Stąd liczba $\frac{pq}{p + q + 11}$ jest liczbą naturalną, czyli $p + q + 11$ jest dzielnikiem pq . Dla liczb pierwszych p, q dzielnikami liczby pq są tylko: 1, p, q, pq . Zatem mogą zachodzić równości:

$$p + q + 11 = 1, \quad p + q + 11 = p, \quad p + q + 11 = q, \quad p + q + 11 = pq.$$

Łatwo sprawdzamy, że dla liczb pierwszych p i q trzy pierwsze z tych równości są sprzeczne, czyli może zachodzić tylko równość

$$p + q + 11 = pq.$$

Otrzymaną równość zapisujemy w postaci równoważnej

$$\begin{aligned}pq &= p + q + 11, \\pq - p - q + 1 &= 12, \\(p-1)(q-1) &= 12.\end{aligned}$$

Ponieważ $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, więc dla $p \leq q$ mamy:

$$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=12, \end{cases} \quad \begin{cases} p-1=2 \\ q-1=6, \end{cases} \quad \begin{cases} p-1=3 \\ q-1=4. \end{cases}$$

Otrzymujemy stąd: $(p, q) = (2, 13)$, $(p, q) = (3, 7)$, $(p, q) = (4, 5)$. Ostatnia para nie jest parą liczb pierwszych. Ostatecznie, po odrzuceniu założenia $p \leq q$, dostajemy

$$(p, q, n) \in \{(2, 13, 1), (13, 2, 1), (3, 7, 1), (7, 3, 1)\}.$$

Zadanie 3.

Rozwiąż równanie

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}} = \frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie

Aby lewa strona równania miała sens musi być spełniony warunek $x \geq 2$.

Zauważmy, że

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{x+2-x} = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{2}.$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{x-x+2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{2}.$$

Dane w zadaniu równanie jest więc równoważne równaniu

$$\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{2} = \frac{1}{4},$$

które możemy zapisać w postaci

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \frac{1}{2}.$$

Podnosząc ostatnią równość obustronnie do kwadratu, dostajemy

$$\begin{aligned}x+2-2\sqrt{(x+2)(x-2)}+x-2 &= \frac{1}{4}, \\2x-2\sqrt{x^2-4} &= \frac{1}{4}, \\8x-1 &= 8\sqrt{x^2-4}\end{aligned}$$

Powtórnie podnosząc do kwadratu, uzyskujemy

$$\begin{aligned}64x^2-16x+1 &= 64(x^2-4), \\-16x &= -257, \\x &= \frac{257}{16} = 16\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzamy, że liczba ta spełnia warunki zadania.

Zadanie 4.

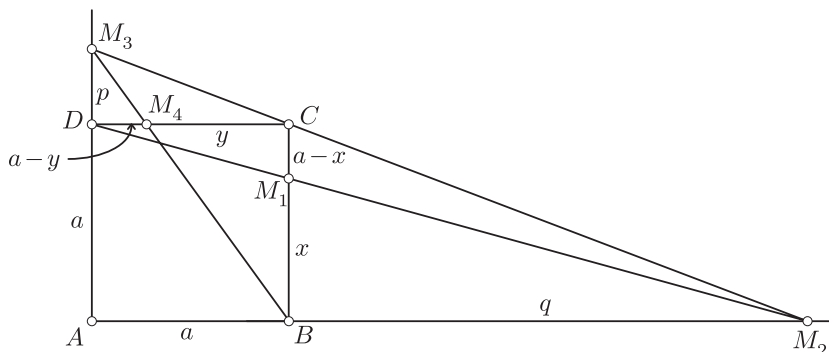
Punkt M_1 leży na boku BC kwadratu $ABCD$. Punkt M_2 jest punktem przecięcia się prostych DM_1 i AB , punkt M_3 jest punktem przecięcia się prostych CM_2 i AD , a punkt M_4 jest punktem przecięcia się prostej BM_3 i odcinka CD . Wykaż, że

$$BM_1 + DM_4 = CM_1 + CM_4.$$

RozwiązanieSposób 1.

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku poniżej:

$$AB = BC = CD = AD = a, \quad BM_1 = x, \quad CM_1 = a - x, \quad CM_4 = y, \quad DM_4 = a - y, \quad BM_2 = q, \quad DM_3 = p.$$



Zauważmy, że trójkąty M_3DM_4 i M_3AB mają takie same kąty, są więc to trójkąty podobne. Stąd

$$\frac{M_3D}{DM_4} = \frac{M_3A}{AB}, \quad \text{czyli} \quad \frac{p}{a-y} = \frac{a+p}{a}$$

albo równoważnie

$$(1) \quad y = \frac{a^2}{a+p}.$$

Trójkąty DAM_2 i M_1BM_2 też są podobne, skąd

$$\frac{DA}{AM_2} = \frac{M_1B}{BM_2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{a}{a+q} = \frac{x}{q},$$

zatem

$$(2) \quad x = \frac{aq}{a+q}.$$

Podobne są również trójkąty M_3DC i M_3AM_2 , więc

$$\frac{M_3D}{DC} = \frac{M_3A}{AM_2}, \quad \text{skąd} \quad \frac{p}{a} = \frac{a+p}{a+q}$$

albo równoważnie

$$(3) \quad a^2 = pq.$$

Teraz z (1) i (3) dostajemy $y = \frac{a^2}{a+p} = \frac{pq}{a+p}$. Natomiast z (2) i (3)

$$x = \frac{aq}{a+q} = \frac{a^2q}{a^2+aq} = \frac{pq \cdot q}{pq+aq} = \frac{pq}{p+a}, \quad \text{czyli} \quad x = y.$$

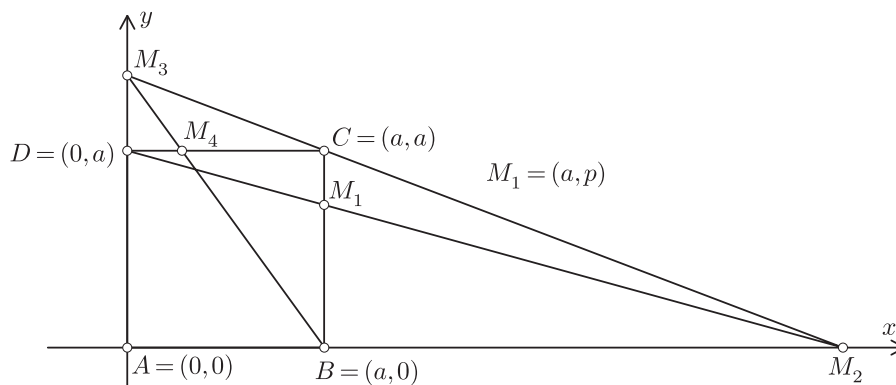
Skoro $BM_1 = CM_4$, więc też $DM_4 = CM_1$, a stąd

$$BM_1 + DM_4 = CM_1 + CM_4.$$

Sposób 2.

W tym sposobie wykorzystamy metodę geometrii analitycznej.

Umieścimy kwadrat $ABCD$ w układzie współrzędnych tak, aby: $A=(0,0)$, $B=(a,0)$, $C=(a,a)$, $D=(0,a)$, gdzie $a > 0$ – zobacz rysunek poniżej.



Jeżeli punkt M_1 leży na boku BC kwadratu $ABCD$, to $M_1 = (a, p)$, gdzie $0 < p < 1$.

Równanie prostej DM_1 ma postać $y = \frac{p-a}{a}x + a$. Jeśli w tym równaniu przyjmiemy $y = 0$,

to dostaniemy $x = -\frac{a^2}{p-a}$. Stąd $M_2 = \left(-\frac{a^2}{p-a}, 0\right)$.

Teraz możemy napisać równanie prostej M_2C . Otrzymujemy wtedy $y = \frac{p-a}{p}x + \frac{a^2}{p}$. Zatem dla $x = 0$ mamy $y = \frac{a^2}{p}$, czyli $M_3 = \left(0, \frac{a^2}{p}\right)$.

W końcu pisząc równanie prostej M_3B , uzyskujemy $y = -\frac{a}{p}x + \frac{a^2}{p}$. Podstawiając w tym równaniu $y = a$, dostajemy $x = a - p$, więc $M_4 = (a - p, a)$.

Możemy teraz wyznaczyć długości odcinków:

$$BM_1 = p, \quad DM_4 = a - p, \quad CM_4 = a - (a - p) = p, \quad CM_1 = a - p,$$

a stąd

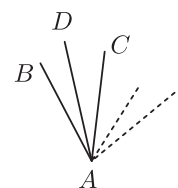
$$BM_1 + DM_4 = p + (a - p) = (a - p) + p = CM_1 + CM_4.$$

Zadanie 5.

Na płaszczyźnie wybrano 6 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Następnie narysowano wszystkie możliwe odcinki łączące te punkty. Niektóre z tych odcinków narysowano kredką niebieską, a inne kredką czerwoną. Wykaż, że narysowano co najmniej jeden trójkąt o bokach tego samego koloru.

Rozwiązanie

Skoro narysowano wszystkie możliwe odcinki, więc z każdego punktu wychodzi dokładnie 5 odcinków. Wybierzmy jeden z tych punktów i oznaczmy go A . Odcinki rysowano kredkami dwóch kolorów, zatem z punktu A wychodzą co najmniej 3 odcinki jednego koloru (przyjmijmy, że są one czerwone). Wybierzmy z nich 3 odcinki i drugie ich końce oznaczmy: B , C , D . Jeśli odcinek BC jest czerwony, to trójkąt ABC ma wszystkie boki jednego koloru (czerwone). Analogicznie jest dla odcinków CD i BD . Jeśli żaden z odcinków: BC , CD , BD nie jest czerwony, to trójkąt BCD ma wszystkie boki jednego koloru (niebieskie). Kończy to rozwiązanie zadania.



(tsz)