XXII Śląski Konkurs Matematyczny
Szkice rozwiązań zadań finałowych

Zadanie 1.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ liczba

$$\underbrace{333\ldots33}_{n\text{ trójek}}\underbrace{222\ldots22}_{n\text{ dwójek}}\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ jedynek}}+2025$$

jest liczbą podzielną przez 12.

Rozwiązanie

Aby liczba całkowita była podzielna przez 12 wystarczy, że jest podzielna przez 3 i przez 4 (bo liczby 3 i 4 są względnie pierwsze). Aby rozwiązać zadanie skorzystamy z cech podzielności liczby całkowitej przez 3 oraz przez 4.

Suma cyfr liczby

$$\underbrace{333\ldots33}_{n\text{ trójek}}\underbrace{222\ldots22}_{n\text{ dwójek}}\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ jedynek}}$$

jest równa $3n+2n+n=6n$ i jest podzielna przez 3, więc i sama liczba jest podzielna przez 3. Liczba 2025 też jest podzielna przez 3, więc ich suma jest liczbą podzielną przez 3.

Zauważmy, że dla $n \geqslant 2$ liczbę z zadania możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\underbrace{333\ldots33}_{n\text{ trójek}}\underbrace{222\ldots22}_{n\text{ dwójek}}\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ jedynek}}+2025 &= \underbrace{333\ldots33}_{n\text{ trójek}}\underbrace{222\ldots22}_{n\text{ dwójek}}\underbrace{111\ldots100}_{n-2\text{ jedynek}}+11+2000+25=\\ &= \underbrace{333\ldots33}_{n\text{ trójek}}\underbrace{222\ldots22}_{n\text{ dwójek}}\underbrace{111\ldots100}_{n-2\text{ jedynek}}+2000+36.\end{aligned}$$

Ponieważ każdy ze składników dzieli się przez 4, więc ich suma też dzieli się przez 4. Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, które dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y spełniają równość

$$\frac{1}{2}f(x)f(y)+2=f(x)+f(y)+\frac{1}{2}xy.$$

Rozwiązanie

Dane w zadaniu równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$f(x)\cdot f(y)+4=2\cdot f(x)+2\cdot f(y)+xy. \tag{1}$$

Przyjmijmy, że $x=y=1$ oraz $f(1)=p$. Wtedy otrzymujemy równanie $p^2+4=4p+1$, którego rozwiązaniami są $p_1=1$ oraz $p_2=3$, czyli może być $f(1)=1$ lub $f(1)=3$. Rozpatrzymy teraz dwa przypadki.

1° Jeżeli $f(1)=1$, to dla $y=1$ równanie (1) przyjmuje postać

$$f(x)\cdot f(1)+4=2\cdot f(x)+2\cdot f(1)+x, \quad \text{czyli} \quad f(x)+4=2\cdot f(x)+2+x,$$

skąd $f(x)=-x+2$.

2° Jeśli $f(1)=3$, to dla $y=1$ mamy

$$f(x)\cdot f(1)+4=2\cdot f(x)+2\cdot f(1)+x, \quad \text{czyli} \quad 3\cdot f(x)+4=2\cdot f(x)+6+x,$$

skąd uzyskujemy $f(x)=x+2$.

Zatem, jeśli takie funkcje istnieją, to są określone powyższymi wzorami.

Sprawdzamy, że funkcje te spełniają równanie (1). Rzeczywiście,

dla funkcji z przypadku 1°:

$$\begin{aligned} f(x)\cdot f(y)+4 &= (-x+2)(-y+2)+4 = xy-2x-2y+4+4= \\ &= -2(x+2)-2(y+2)+xy = 2\cdot f(x)+2\cdot f(y)+xy \end{aligned}$$

oraz dla funkcji z przypadku 2°:

$$\begin{aligned} f(x)\cdot f(y)+4 &= (x+2)(y+2)+4 = xy+2x+2y+4+4= \\ &= 2(x+2)+2(y+2)+xy = 2\cdot f(x)+2\cdot f(y)+xy. \end{aligned}$$

Zadanie 3.

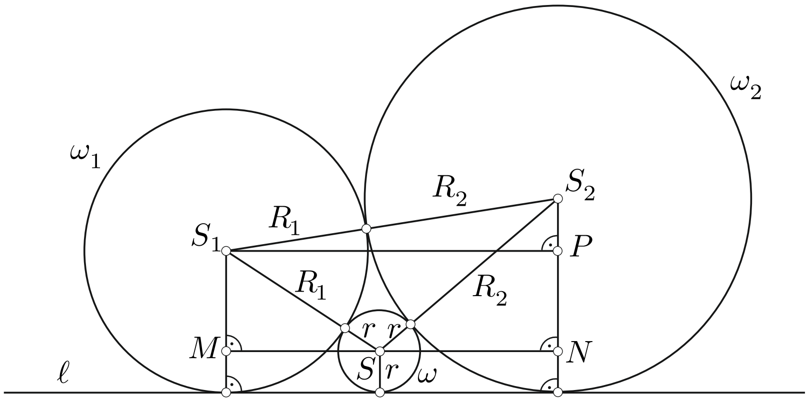
Okręgi ω_1 i ω_2 o promieniach odpowiednio R_1 i R_2 są styczne zewnętrznie oraz styczne w dwóch różnych punktach do prostej ℓ. Okrąg ω o promieniu r jest styczny zewnętrznie do okręgów ω_1 i ω_2 oraz do prostej ℓ. Wykaż, że jeśli $r < R_1 \leqslant R_2$, to zachodzi nierówność:

$$r \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{R_1 R_2}\,.$$

Rozwiązanie

Jeśli dwa okręgi są styczne zewnętrznie, to odległość ich środków jest równa sumie ich promieni, skąd

$$S_1S_2 = R_1+R_2, \quad S_1S = R_1+r \quad \text{i} \quad S_2S = R_2+r.$$



Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta S_2PS_1, otrzymujemy

$$S_1P^{\,2} + S_2P^{\,2} = S_1S_2^{\;2},$$

$$S_1P^{\,2} + (R_2-R_1)^2 = (R_1+R_2)^2,$$

$$S_1P^{\,2} + R_2^2 - 2R_1R_2 + R_1^2 = R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2,$$

skąd $S_1P^{\,2} = 4R_1R_2$, czyli $S_1P = 2\sqrt{R_1R_2}\,$.

W trójkącie S_1MS zachodzi związek $MS^2 + S_1M^2 = S_1S^2$, czyli

$$SM^2 + (R_1-r)^2 = (R_1+r)^2,$$

$$MS^2 + R_1^2 - 2rR_1 + r^2 = R_1 + 2rR_1 + r^2,$$

skąd $MS^2 = 4rR_1$, więc $MS = 2\sqrt{rR_1}\,$.

Natomiast w trójkącie S_2NS mamy

$$NS^2 + S_2N^2 = S_2S^2,$$

$$NS^2 + (R_2-r)^2 = (R_2+r)^2,$$

$$NS^2 + R_2^2 - 2rR_2 + r^2 = R_2^2 + 2rR_2 + r^2,$$

a stąd $NS^2 = 4rR_2$, czyli $NS = 2\sqrt{rR_2}$. Ponieważ

$$S_1P = MN = MS + NS,$$

więc

$$2\sqrt{rR_1} + 2\sqrt{rR_2} = 2\sqrt{R_1R_2},$$
$$\sqrt{r}\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right) = \sqrt{R_1R_2},$$

skąd

$$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}}, \quad \text{czyli} \quad r = \frac{R_1R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}.$$

Na podstawie nierówności $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, dostajemy

$$\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right)^2 \geqslant 4\sqrt{R_1R_2},$$
$$\frac{1}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{R_1R_2}}.$$

Zatem

$$r = \frac{R_1R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2} \leqslant \frac{R_1R_2}{4\sqrt{R_1R_2}} = \frac{1}{4}\sqrt{R_1R_2}.$$

Zadanie 4.

W kwadracie $\mathcal{K}$ o boku 12 znajduje się, umieszczonych dowolnie, 77 punktów. Wykaż, że w kwadracie $\mathcal{K}$ istnieje punkt odległy od każdego z tych 77 punktów o więcej niż 0,77.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z dwóch oczywistych faktów:

Fakt 1. Jeśli punkt Y nie należy do koła o środku X i promieniu r, to $XY > r$.

Fakt 2. Jeśli na płaszczyźnie figura F ma pole mniejsze od pola figury G, to w figurze G istnieje punkt, który nie należy do figury F.

Na początku rozpatrzmy koło o środku w jednym z umieszczonych w kwadracie punktów i promieniu 0,77. Pole tego koła jest równe $\pi \cdot 0{,}77^2$. Ponieważ

$$\pi < 3,142 \quad \text{i} \quad 0{,}77^2 = 0{,}5929 < 0{,}593$$

więc

$$\pi \cdot 0{,}77^2 < 3,142 \cdot 0{,}593 = 1{,}863206 < 1{,}864.$$

Suma pól 77 kół o środkach w wybranych punktach spełnia zależność

$$77 \cdot \pi \cdot 0{,}77^2 < 77 \cdot 1{,}864 = 143,528 < 144.$$

Natomiast pole kwadratu o boku 12 jest równe 144. Stąd, na podstawie faktu 2., istnieje w tym kwadracie punkt, który nie należy do żadnego z kół o środkach w wybranych punktach, a zatem jego odległość od każdego z tych punktów jest, na podstawie faktu 1., większa od 0,77, a to mieliśmy wykazać.

Zadanie 5.

Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera i spełniają równość

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}.$$

Wykaż, że $a=b=c$.

Rozwiązanie

Niech różne od zera liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość daną w zadaniu. Wtedy dostajemy kolejno:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b},$$

$$2\cdot\frac{a^2}{b^2}+2\cdot\frac{b^2}{c^2}+2\cdot\frac{c^2}{a^2}=2\cdot\frac{b}{a}+2\cdot\frac{a}{c}+2\cdot\frac{c}{b},$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2}-2\cdot\frac{a}{c}+\frac{b^2}{c^2}\right)+\left(\frac{b^2}{c^2}-2\cdot\frac{b}{a}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{c^2}{a^2}-2\cdot\frac{c}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)=0,$$

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{b}\right)^2=0.$$

Stąd

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{c}=0,\quad \frac{b}{c}-\frac{c}{a}=0 \quad\text{i}\quad \frac{c}{a}-\frac{a}{b}=0$$

albo równoważnie

$$b^2=ac,\quad c^2=ab \quad\text{i}\quad a^2=bc.$$

Dodając stronami ostatnie równości, otrzymujemy

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

i kolejno

$$\begin{aligned}2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac&=0,\\(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)&=0,\\(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2&=0,\end{aligned}$$

skąd dostajemy: $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, czyli $a=b=c$.

(tsz)