XX Śląski Konkurs Matematyczny
Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2023

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych spełniające równanie

$$x^2+(y-1)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie

Przekształcając dane równanie równoważnie, otrzymujemy kolejno:

$$x^2+(y-1)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3},$$

$$x^2+y^2-2y+1+x^2-2xy+y^2=\frac{1}{3},$$

$$2x^2+2y^2-2xy-2y+\frac{2}{3}=0, \quad \Big|\cdot 2$$

$$4x^2-4xy+y^2+3\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)=0,$$

$$(2x-y)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=0.$$

Zauważmy, że suma liczb nieujemnych jest równa zero tylko wtedy, gdy każda z tych liczb jest równa zero. Stąd $x=\frac{1}{2}y$ i $y=\frac{2}{3}$, czyli jest tylko jedna para $(x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ spełniająca równanie dane w zadaniu.

Zadanie 2.

Na tablicy zostały zapisane liczby naturalne: 1, 2, 3, …, 32, 33. W jednym ruchu wybieramy dwie liczby, spośród zapisanych na tablicy, ścieramy je, a na tablicy do pozostałych liczb dopisujemy ich sumę albo ich różnicę. Operację tę powtarzamy i po 32 takich ruchach na tablicy pozostaje tylko jedna liczba. Rozstrzygnij, czy można tak wybierać liczby w kolejnych ruchach, aby ostatnią liczbą zapisaną na tablicy była liczba 0.

Rozwiązanie

Niech na tablicy będą zapisane liczby: 1, 2, 3, …, 32, 33, a wśród nich liczby x, y, które będziemy ścierali w pierwszym kroku, czyli: 1, 2, 3, …, x,…, y, …, 32, 33.

Jeśli zamiast liczb x, y wpiszemy ich sumę $x+y$, to łatwo zauważyć, że suma wszystkich liczb zapisanych na tablicy przed operacją i po operacji będzie taka sama.

Jeżeli natomiast zamiast liczb x, y będziemy na tablicy zapisywać ich różnicę, to z uwagi na równość $y-x=(x+y)-2x$ suma wszystkich liczb zapisanych na tablicy zmniejszy się o liczbę parzystą. Zatem sumy liczb zapisanych na tablicy przed operacją i po wykonaniu takiej operacji są tej samej parzystości.

Tak będzie też w każdym kolejnym kroku. Ponieważ

$$1+2+3+\cdots+32+33=\frac{33\cdot 34}{2}=33\cdot 17=561,$$

więc suma liczb na tablicy po każdym kroku będzie liczbą nieparzystą. Stąd i ostatnia liczba musi być nieparzyta. Nie można więc wybierać liczb tak, aby na końcu na tablicy pozostała liczba 0.

Zadanie 3.

Wykaż, że dla dowolnych, dodatnich liczb rzeczywistych a, b spełniona jest nierówność

$$a+b+20\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 2\left(\sqrt{a+20}+\sqrt{b+20}-1\right).$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że dla dodatniej liczby x prawdziwa jest nierówność

$$x+\frac{20}{x}\geqslant 2\sqrt{x+20}-1. \tag{1}$$

Wyznaczając różnicę lewej i prawej strony tej nierówności, dostajemy

$$x+\frac{20}{x}-2\sqrt{x+20}+1=\frac{x^2+(x+20)-2x\sqrt{x+20}}{x}=$$

$$=\frac{x^2-2x\sqrt{x+20}+\left(\sqrt{x+20}\right)^2}{x}=\frac{\left(x-\sqrt{x+20}\right)^2}{x}\geqslant 0,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności (1).

Liczby a i b są dodatnie, więc na podstawie (1) mamy

$$a+\frac{20}{a}\geqslant 2\sqrt{a+20}-1 \quad \text{oraz} \quad b+\frac{20}{b}\geqslant 2\sqrt{b+20}-1.$$

Dodając stronami powyższe nierówności, otrzymujemy

$$a+\frac{20}{a}+b+\frac{20}{b}\geqslant 2\sqrt{a+20}-1+2\sqrt{b+20}-1,$$

czyli

$$a+b+20\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 2\left(\sqrt{a+20}+\sqrt{b+20}-1\right).$$

Zadanie 4.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Na jego przekątnych AC i BD istnieją odpowiednio takie punkty K i L, że

$$AK=AB \quad \text{i} \quad DL=DC.$$

Wykaż, że proste KL i AD są równoległe.

Rozwiązanie

Niech przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P. Zauważmy, że $\sphericalangle BAC=\sphericalangle BDC$ (kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku) oraz $\sphericalangle APB=\sphericalangle CPD$ (kąty wierzchołkowe), więc trójkąty ABP i CDP są podobne. Stąd

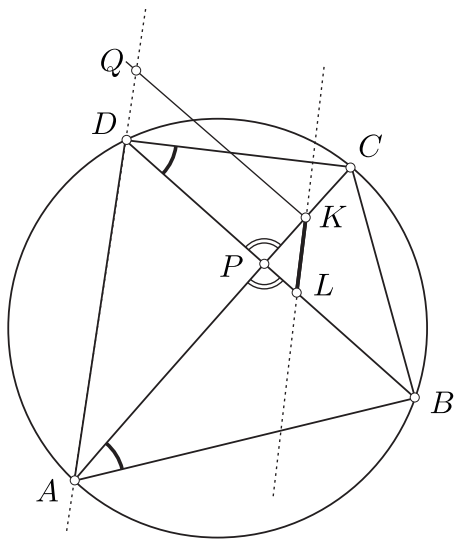
$$\frac{AB}{AP}=\frac{CD}{DP},$$

czyli też, uwzględniając założenia zadania, mamy

$$\frac{AK}{AP}=\frac{DL}{DP}. \tag{1}$$

Niech Q będzie takim punktem na prostej AD, że odcinki KQ i PD są równoległe. Zatem trójkąty AKQ i APD są podobne, skąd

$$\frac{AK}{AP}=\frac{KQ}{PD}. \tag{2}$$



Z (1) i (2) dostajemy

$$\frac{KQ}{PD}=\frac{DL}{DP},$$

a stąd $KQ=DL$. Z zależności $KQ \parallel DL$ i $KQ=DL$ wynika, że czworokąt $PKQD$ jest równoległobokiem, więc również $KL \parallel DQ$, czyli proste KL i AD są równoległe.

Zadanie 5.

Wykaż, że nie istnieje taka liczba rzeczywista a, dla której liczby

$$m=a+\sqrt{2023} \quad \text{i} \quad n=\frac{1}{a}+\sqrt{2023}$$

są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje taka liczba rzeczywista $a\neq 0$, dla której liczby

$$m=a+\sqrt{2023} \quad \text{i} \quad n=\frac{1}{a}+\sqrt{2023}$$

są liczbami całkowitymi. Stąd

$$m-\sqrt{2023}=a \quad \text{i} \quad n-\sqrt{2023}=\frac{1}{a}.$$

Zatem

$$\left(m-\sqrt{2023}\right)\cdot\left(n-\sqrt{2023}\right)=a\cdot\frac{1}{a}=1$$

i dalej

$$mn-m\sqrt{2023}-n\sqrt{2023}+2023=1,$$

$$mn+2022=(m+n)\sqrt{2023}.$$

Gdyby było $m+n\neq 0$, to mielibyśmy

$$\frac{mn+2022}{m+n}=\sqrt{2023}=17\sqrt{7},$$

a to nie jest możliwe dla liczb całkowitych m, n, bo liczba $17\sqrt{7}$ jest liczbą niewymierną. Zatem rozważmy przypadek $m+n=0$, czyli $m=-n$. Wtedy

$$-n^2+2022=0, \quad \text{skąd} \quad n^2=2022.$$

To też nie jest możliwe, bo $44^2<2022<45^2$.
Kończy to dowód, że nie istnieje liczba rzeczywista a, dla której liczby m, n byłyby liczbami całkowitymi.

Uwaga. Gdy liczbę 2023 zastąpimy liczbą 2026, to taka liczba a istnieje. Rzeczywiście, biorąc liczbę $a=15-\sqrt{2026}$, dostajemy $\frac{1}{a}=-15-\sqrt{2026}$ i zauważmy, że liczby $a+\sqrt{2026}$ oraz $\frac{1}{a}+\sqrt{2026}$ są liczbami całkowitymi.

Można wykazać, że dla każdej liczby całkowitej p istnieje taka liczba rzeczywista a, dla której liczby $a+\sqrt{p^2+1}$ i $\frac{1}{a}+\sqrt{p^2+1}$ są liczbami całkowitymi.

Pozostawiamy to jako dodatkowe zadanie do samodzielnego rozwiązania.

(*tsz*)