XIX Śląski Konkurs Matematyczny
Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2022

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{yz} \\ y^2 = \dfrac{2}{xz} \\ z^2 = \dfrac{8}{xy}. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że musi być: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Dany układ równań możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\begin{cases} x^2yz = 1 \\ y^2zx = 2 \\ z^2xy = 8. \end{cases} \tag{1}$$

Mnożąc stronami równania otrzymanego układu, otrzymujemy

$$x^4y^4z^4 = 16,$$

skąd $xyz = 2$ lub $xyz = -2$.
Układ (1) może też być zapisany następująco:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{xyz} \\ y = \dfrac{2}{xyz} \\ z = \dfrac{8}{xyz}. \end{cases} \tag{2}$$

Jeżeli $xyz = 2$, to z układu (2) dostajemy:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 1, \quad z = 4,$$

a jeśli $xyz = -2$, to:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -1, \quad z = -4.$$

Ponieważ mnożenie równań stronami nie jest przekształceniem równoważnym, więc konieczne jest dokonanie sprawdzenia, czy otrzymane trójki liczb spełniają układ dany w treści zadania. Pozostawiamy to jako łatwe ćwiczenie do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 2.

Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ spełniające oba warunki:

1° $f(2)=22$,

2° $f(xy+2x-y)=f(x+1)\cdot f(y-1)+23x-22y$
dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

Rozwiązanie

Załóżmy, że taka funkcja istnieje.
Przyjmując $x=1$ w warunku 2°, otrzymujemy dla dowolnego $y\in\mathbf{R}$

$$f(y+2-y)=f(2)\cdot f(y-1)+23-22y,$$
$$f(2)=f(2)\cdot f(y-1)+23-22y.$$

Wykorzystując teraz warunek 1°, dostajemy

$$22=22\cdot f(y-1)+23-22y,$$
$$22\cdot(f(y-1)-1)=22y-23,$$

skąd

$$f(y-1)=y-\frac{1}{22} \quad \text{dla dowolnego } y\in\mathbf{R}.$$

Przyjmując teraz $y=x+1$, uzyskujemy

$$f(x)=f((x+1)-1)=x+1-\frac{1}{22}=x+\frac{21}{22} \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbf{R}.$$

Przyjmując, że taka funkcja istnieje dostaliśmy, że może to być tylko funkcja $f(x)=x+\frac{21}{22}$.
Musimy teraz dokonać sprawdzenia, że ta funkcja spełnia podane w treści zadania warunki.
Ponieważ

$$f(2)=2+\frac{21}{22}=2\frac{21}{22}\neq 22,$$

więc funkcja nie spełnia warunku 1°. Zatem nie istnieje funkcja spełniającą warunki zadania.

Zadanie 3.

Rozstrzygnij, dla jakich nieujemnych liczb całkowitych n, liczba

$$A_n=2021^n+2022^n+2023^n$$

jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu zadania wykorzystamy arytmetykę modulo (arytmetykę reszt z dzielenia). Przypominamy, że jeśli liczby a i b przy dzieleniu przez liczbę naturalną $p>1$ dają takie same reszty (różnica $a-b$ dzieli się przez p), to fakt ten zapisujemy $a\equiv b \pmod p$. Mówimy też, że liczby a i b przystają do siebie według modułu p.

Relacja przystawania modulo ma między innymi następujące własności:

(1) jeżeli $a\equiv b \pmod p$ i $c\equiv d \pmod p$, to $a+c\equiv b+d \pmod p$,

(2) jeżeli $a\equiv b \pmod p$ i $n\in\mathbf{N}$, to $a^n\equiv b^n \pmod p$,

(3) jeżeli $a\equiv b \pmod p$ i $c\in\mathbf{Z}$, to $ac\equiv bc \pmod p$,

Najpierw udowodnimy bardzo przydatny lemat:

Reszta z dzielenia liczby naturalnej A przez 3 jest równa reszcie z dzielenia sumy cyfr liczby A przez 3.

Zauważmy, że $10 \equiv 1 \pmod 3$, bo $10-1$ dzieli się przez 3. Stąd i z własności (2) dostajemy, że dla liczby naturalnej n zachodzi przystawanie $10^n \equiv 1 \pmod 3$.

Weźmy liczby naturalną A i jej zapis dziesiętny $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, czyli

$$A = 10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0.$$

Z zależności $10^n \equiv 1 \pmod 3$ oraz własności (3), otrzymujemy dla cyfr a_i:

$$10^n \cdot a_i \equiv a_i \pmod 3.$$

Wykorzystując powyższą zależność i własność (1), uzyskujemy

$$A = 10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 3.$$

Kończy to dowód lematu, który wykorzystamy w rozwiązaniu zadania.

Zauważmy, że liczba 2022 dzieli się przez 3. Zatem

$$2021 \equiv -1 \pmod 3, \quad 2022 \equiv 0 \pmod 3, \quad 2023 \equiv 1 \pmod 3.$$

Stąd dla dodatnich, parzystych liczb naturalnych n mamy

$$2021^n \equiv (-1)^n = 1 \pmod 3, \quad 2022^n \equiv 0 \pmod 3, \quad 2023^n \equiv 1 \pmod 3$$

i na podstawie własności (1)

$$A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n \equiv 1 + 0 + 1 = 2 \pmod 3,$$

a dla nieparzystych liczb naturalnych n

$$2021^n \equiv (-1)^n = -1 \pmod 3, \quad 2022^n \equiv 0 \pmod 3, \quad 2023^n \equiv 1 \pmod 3$$

i na podstawie własności (1)

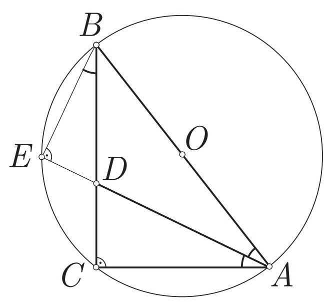
$$A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n \equiv -1 + 0 + 1 = 0 \pmod 3.$$

Oznacza to, że liczby A_n dzielą się przez 3 dla nieparzystych liczb naturalnych n. Jeśli przyjmiemy $n = 0$, to $A_0 = 2021^0 + 2022^0 + 2023^0 = 1 + 1 + 1 = 3$, a ta liczba też dzieli się przez 3. Ostatecznie liczby A_n dzielą się przez 3, gdy $n = 0$ lub n jest nieparzystą liczbą naturalną.

Zadanie 4. W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C poprowadzono dwusieczną kąta BAC, która przecina bok BC w punkcie D. Wykaż, że

$$AD = \sqrt{AB \cdot AC - DB \cdot DC}.$$

Rozwiązanie



Przedłużmy odcinek AD do przecięcia z okręgiem opisanym na trójkącie ABC otrzymując punkt E. Z równości kątów: CAD, BAD i DBE wnioskujemy, że trójkąty prostokątne ACD, AEB i BED są podobne. Stąd dostajemy zależności:

$$\frac{DC}{AD} = \frac{DE}{DB} \quad \text{i} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AD},$$

albo równoważnie

(1) $\qquad AD \cdot DE = DC \cdot DB \quad$ i $\quad AD \cdot AE = AB \cdot AC.$

Ponieważ $AE = AD + DE$, więc

$$AD \cdot (AD + DE) = AB \cdot AC,$$
$$AD^2 + AD \cdot DE = AB \cdot AC.$$

Skoro z (1) wynika, że $AD \cdot DE = DB \cdot DC$, więc

$$AD^2 + DB \cdot DC = AB \cdot AC,$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC,$$

skąd uzyskujemy, że

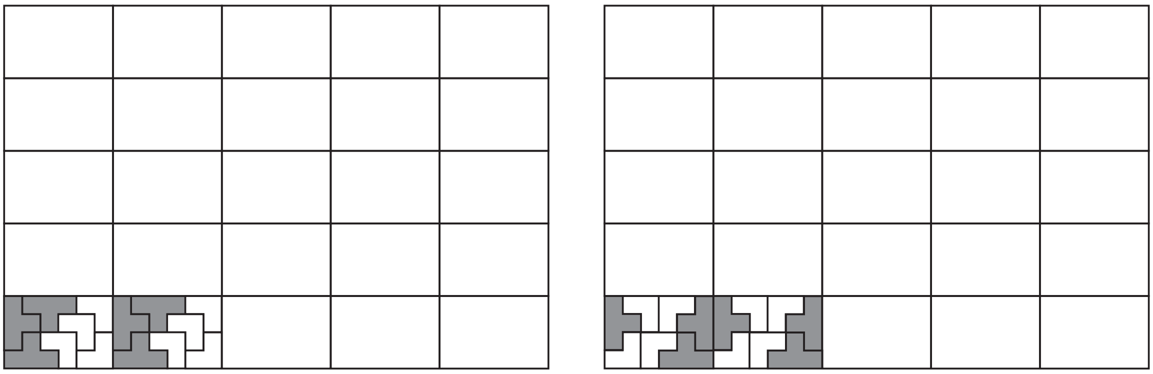
$$AD = \sqrt{AB \cdot AC - DB \cdot DC}.$$

Zadanie 5.

Trimino to klocek zbudowany z trzech kwadratów jednostkowych (rysunek po lewej), a tetramino — z czterech kwadratów jednostkowych (rysunek po prawej). Laura ma 100 klocków trimino oraz 75 klocków tetramino. Twierdzi, że potrafi nimi szczelnie wypełnić szachownicę o wymiarach 20×30 i nie kładąc jednego klocka na drugim. Czy Laura ma rację? Odpowiedź uzasadnij.

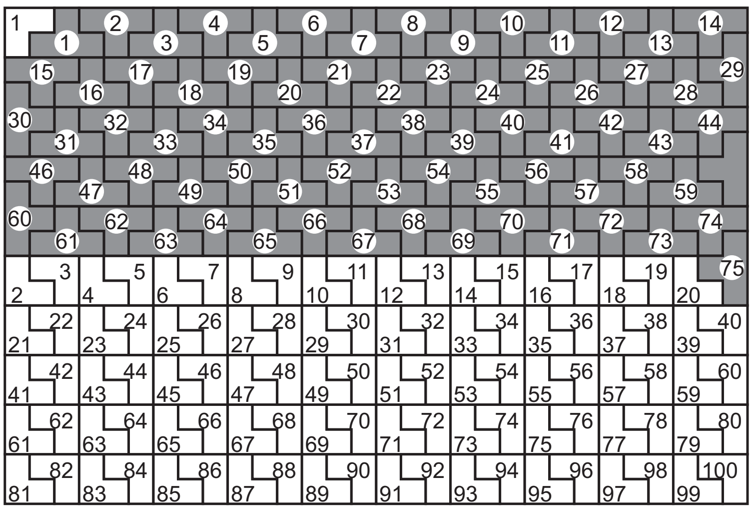
Rozwiązanie

Czterema klockami trimino i trzema klockami tetramino można szczelnie wypełnić prostokątną szachownicę o wymiarach 4×6 — przykłady takich wypełnień na rysunkach poniżej.



Szachownicę 20×30 można podzielić na 25 prostokątów o wymiarach 4×6. Ponieważ $25 \cdot 4 = 100$ oraz $25 \cdot 3 = 75$, więc szachownicę 20×30 można szczelnie wypełnić takimi klockami zgodnie z warunkami zadania. Zatem Laura ma rację.

Zauważmy, że są również inne wypełnienia takiej szachownicy, które również spełniają warunki zadania (zobacz rysunek poniżej).



(*tsz*)