

VIII Śląski Konkurs Matematyczny
zawody rejonowe

15 lutego 2011 r.

czas: $10^{00} - 12^{00}$

Zadanie 1. (3 pkt.)

Udowodnij, że $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{6-\sqrt{32}} = 1$.

Zadanie 2. (3 pkt.)

Dla jakich wartości parametru m równanie

$$x^2 + mx + m - 1 = 0$$

ma dwa pierwiastki, z których jeden jest sinusem, a drugi kosinusem tego samego kąta?

Zadanie 3. (4 pkt.)

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 9 = 4y \\ y^2 + 1 = 6z \\ z^2 + 4 = 2x. \end{cases}$$

Zadanie 4. (5 pkt.)

Punkt P jest dowolnym punktem wewnętrznym sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABP , CDP , EPF jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

Zadanie 5. (5 pkt.)

Wewnątrz trójkąta ABC wybrano dowolny punkt M , przez który poprowadzono proste równoległe do jego boków. Proste te podzieliły trójkąt ABC na sześć części, z których trzy są trójkątami. Niech r_1 , r_2 , r_3 będą promieniami okręgów wpisanych w powstałe trójkąty, a r promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykaż, że

$$r = r_1 + r_2 + r_3.$$

Zadanie 6. (5 pkt.)

Liczby całkowite dodatnie a oraz b spełniają równość

$$ab(b+2) = a(a+1) + 1.$$

Wykaż, że \sqrt{a} jest liczbą wymierną.

Powodzenia !