

V Śląski Konkurs Matematyczny
zawody rejonowe — luty 2008

1. Wykaż, że dla dodatnich liczb m, n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \sqrt{\frac{m+n}{mn}}.$$

2. W trójkąt prostokątny, o przyprostokątnych 5 i 12, wpisano okrąg. Oblicz najmniejszą z odległości wierzchołka kąta prostego od punktów tego okręgu.

3. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych, które spełniają równanie $xy + y = 5x + 2008$.

4. Liczby a i b są takimi liczbami całkowitymi, że $a^2 + 119ab + b^2$ dzieli się przez 11. Wykaż, że $a^3 - b^3$ też dzieli się przez 11.

5. Prostokąt $ABCD$ o bokach długości $AB = a$ i $AD = b$, gdzie $a > b$, przekształcono przez symetrię osiową względem prostej zawierającej przekątną AC tego prostokąta. Jaka figurą jest część wspólna prostokąta $ABCD$ i jego obrazu? Odpowiedź uzasadnij. Oblicz pole tej figury.