XIII Śląski Konkurs Matematyczny
zawody rejonowe

27 stycznia 2016 r. czas: $10^{00} - 12^{00}$

1. (6 pkt.) Joasia poszła do sklepu na zakupy. Kupiła trzy przedmioty i zapłaciła za nie 222 zł 22 gr. Patrząc na ceny zakupionych przedmiotów, Joasia zauważyła coś jeszcze — w cenie każdego zakupionego przedmiotu liczba złotych jest kwadratem liczby groszy. Oblicz, ile kosztował każdy z zakupionych przez Joasię przedmiotów, jeśli za jeden z nich zapłaciła 1 zł 1 gr.

2. (6 pkt.) Funkcja f, określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, spełnia warunki:

1° $f(0)=2016$,

2° $f(x+2)=\dfrac{f(x)}{5f(x)-1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznacz $f(2016)$.

3. (6 pkt.) Rozstrzygnij, czy wierzchołki ośmiokąta foremnego można tak ponumerować liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, aby dla dowolnych trzech jego kolejnych wierzchołków suma ich numerów była większa od 13.

4. (6 pkt.) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=1$. Wiadomo, że dwusieczna kąta przy wierzchołku A jest prostopadła do środkowej poprowadzonej z wierzchołka B oraz dwusieczna kąta przy wierzchołku B jest prostopadła do środkowej poprowadzonej z wierzchołka A. Oblicz obwód trójkąta ABC.

5. (6 pkt.) W trójkącie ABC o polu S długości a i b boków odpowiednio BC i AC są liczbami całkowitymi. Wykaż, że jeśli

$$\frac{1}{8}(a+b+1)(a+b-1)<S,$$

to trójkąt ABC jest równoramienny.

Powodzenia !

Uwaga!

Od XII edycji w Śląskim Konkursie Matematycznym została wprowadzona następująca skala ocen rozwiązań:

6 pkt. — zadanie rozwiązane bezbłędnie;

5 pkt. — rozwiązanie posiadające drobne usterki, które jednak nie dyskwalifikują zadania jako rozwiązanego;

2 pkt. — połowa zadania, tzn. rozwiązanie zawierające usterki, przy których, według oceniającego, zadania nie można uznać za rozwiązane, jednak co najmniej połowa zadania została zrobiona;

0 pkt. — zadanie nierozwiązane lub zawierające drobne przyczynki, których jednak nie można uznać nawet za pół zadania.