

X Śląski Konkurs Matematyczny

zawody rejonowe

5 lutego 2013 r.

czas: $10^{00} - 12^{00}$

Zadanie 1. (5 pkt.)

Danych jest 2013 liczb rzeczywistych $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{2012}, l_{2013}$, które spełniają warunek

$$l_1 < l_2 < l_3 < \dots < l_{2012} < l_{2013}.$$

Wykaż, że

$$\frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{2012} + l_{2013}}{2013} > \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{2012}}{2012}.$$

Zadanie 2. (5 pkt.)

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba $n^4 + 33$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 3. (5 pkt.)

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} xy + yz + z = 5 \\ 2yz + x = 5 \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

Zadanie 4. (5 pkt.)

Na boku AB trójkąta ABC obrano taki punkt K , że $KB = 3 \cdot AK$, a na boku BC tego trójkąta taki punkt L , że $CL = 3 \cdot BL$. Niech Q będzie punktem przecięcia prostych AL i CK . Znajdź stosunek pola trójkąta BQC do pola trójkąta ABC .

Zadanie 5. (5 pkt.)

Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c . Rozstrzygnij, czy z odcinków długości $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ można zbudować trójkąt. Odpowiedź uzasadnij.

Powodzenia !