

XVII Śląski Konkurs Matematyczny
Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2020

Zadanie 1.

Liczby a, b, c są takimi liczbami dodatnimi, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$. Wykazać, że

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

Rozwiązanie

Równość $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$ możemy zapisać równoważnie $ab+bc+ca=1$. Przekształcając równoważnie daną w zadaniu nierówność oraz wykorzystując założenie, otrzymujemy kolejno:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a},$$

$$\frac{1-ab}{a+b} + \frac{1-bc}{b+c} + \frac{1-ca}{c+a} \geq \sqrt{3},$$

$$\frac{bc+ca}{a+b} + \frac{ab+ca}{b+c} + \frac{ab+bc}{c+a} \geq \sqrt{3},$$

$$\frac{c(b+a)}{a+b} + \frac{a(b+c)}{b+c} + \frac{b(a+c)}{c+a} \geq \sqrt{3},$$

$$a+b+c \geq \sqrt{3}$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3,$$

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3,$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq 1,$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

$$\frac{1}{2} \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right) \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest zawsze prawdziwa, więc nierówność dana w zadaniu też jest prawdziwa. Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Znaleźć wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych spełniające równanie

$$p^6 - 386 = q^3.$$

Rozwiązanie

Łatwo sprawdzamy, że żadna z liczb p, q nie może być równa 2. Szukamy więc liczb pierwszych większych od 2. Dane równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$p^6 - 386 = q^3,$$

$$p^6 - q^3 = 386,$$

$$(p^2 - q)(p^4 + p^2q + q^2) = 386 = 2 \cdot 193.$$

Ponieważ $p^4 + p^2q + q^2 > 0$, więc również $p^2 - q > 0$.

Ponadto dla dodatnich liczb całkowitych mamy

$$p^2 - q < p^2 + q < p^4 + p^2q + q^2.$$

Z uwagi na to, że liczby 2 i 193 są liczbami pierwszymi, więc mamy tylko jedną możliwość

$$\begin{cases} p^2 - q = 2 \\ p^4 + p^2q + q^2 = 193. \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań — w dodatnich liczbach całkowitych — jest jedynie para $(p, q) = (3, 7)$ i spełnia ona warunki zadania.

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ spełniające warunki:

1° $f(-1) = 1$,

2° $f(xy) = xf(y) + y^{2020}f(x) + y^{2020}x$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y .

Rozwiązanie

Wykażemy, że jest tylko jedna funkcja $f(x) = -x$, która spełnia powyższe warunki.

Przyjmując $y := -1$ w warunku 2°, dostajemy

$$f(-x) = xf(-1) + (-1)^{2020}f(x) + (-1)^{2020}x,$$

skąd, wykorzystując 1°, mamy

$$(1) \quad f(-x) = 2x + f(x)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

Analogicznie, przyjmując w 2° teraz $x := -1$, otrzymujemy

$$f(-y) = -f(y) + y^{2020}f(-1) + y^{2020} \cdot (-1),$$

czyli $f(-y) = -f(y)$ dla każdej liczby rzeczywistej y .

W szczególności dla $y = x$ mamy $f(-x) = -f(x)$. Wstawiając to do (1), uzyskujemy

$$-f(x) = 2x + f(x),$$

a stąd już łatwo dostajemy $f(x) = -x$. Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy bez trudu, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

Zadanie 4.

W każdą komórkę tabeli 5×8 wpisujemy jedną liczbę ze zbioru $\{1, 3\}$. Rozstrzygnąć, czy można je tak wpisać, aby suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie była liczbą podzieloną przez 7.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że tabela ma 5 wierszy i 8 kolumn.

Rozpatrzmy sumę liczb wybranego wiersza. Zauważmy, że suma liczb wpisanych w tym wierszu jest co najmniej 8 i co najwyżej 24. Liczbami podzielными przez 7 są więc w tym przypadku liczby 14 i 21. Ponieważ w wierszu występuje parzysta liczba komórek, więc aby były spełnione warunki zadania, to suma liczb w tym wierszu musi być równa 14. Analogicznie jest w każdym wierszu. Stąd suma wszystkich liczb wpisanych w komórki tablicy wynosi $5 \cdot 14 = 70$.

Z drugiej strony suma liczb dowolnej kolumny jest co najmniej 5 i co najwyżej 15. Skoro ma to być liczba podzielna przez 7, więc może to być 7 lub 14. Ale suma pięciu liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą, zatem ta suma może być tylko 7. Wtedy suma wszystkich liczb tablicy byłaby równa $8 \cdot 7 = 56 \neq 70$. Wnioskujemy stąd, że nie da się wpisać takich liczb zgodnie z warunkami zadania.

Zadanie 5.

Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt K jest rzutem prostokątnym punktu B na przekątną AC . Punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio AK i CD . Wykazać, że

$$BN^2 = BK^2 + KM^2 + MN^2.$$

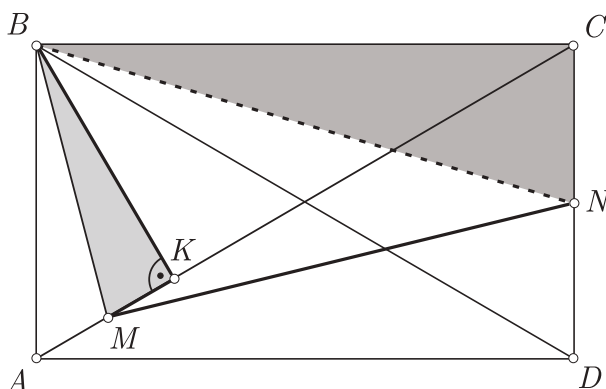
Rozwiązanie

Sposób 1.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC,$$

stąd trójkąty prostokątne ABK i BDC są podobne.



Ponieważ punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio AK i CD , więc podobne są też trójkąty ABM i DBN , skąd dostajemy, że $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DBN$ i w konsekwencji tego również $\sphericalangle BMK = \sphericalangle BNC$.

Ponieważ punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej BC , więc B, M, N, C leżą na jednym okręgu. Ponadto $\sphericalangle BCN = 90^\circ$, czyli średnicą tego okręgu jest odcinek BN , skąd wynika, że również $\sphericalangle BMN = 90^\circ$.

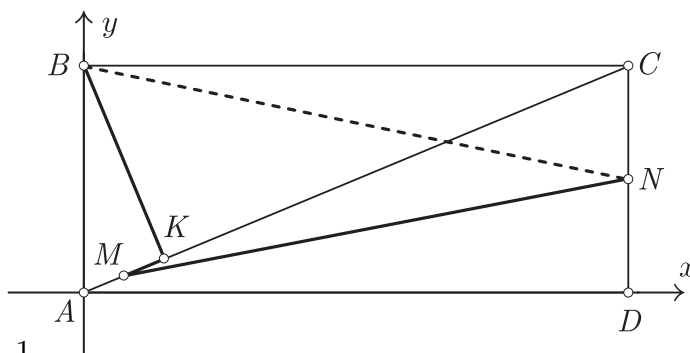
Zatem trójkąty BMK i BMN są prostokątne, więc na podstawie twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do tych trójkątów otrzymujemy

$$BN^2 = BM^2 + MN^2 = BK^2 + KM^2 + MN^2.$$

Sposób 2.

Umieśćmy prostokąt $ABCD$ w układzie współrzędnych (jak na rysunku obok) i przyjmijmy jednostkę tak, aby $AB = 2$. Przyjmijmy:

$$A = (0, 0), B = (0, 2), C = (2d, 2), \\ D = (2d, 0), \text{ gdzie } d > 0.$$



Stąd dostajemy równanie prostej AC : $y = \frac{1}{d}x$.

Zatem prosta BK ma równanie $y = -dx + 2$. Z układu równań

$$\begin{cases} y = \frac{1}{d}x \\ y = -dx + 2 \end{cases}$$

dostajemy współrzędne punktu $K = \left(\frac{2d}{d^2+1}, \frac{2}{d^2+1} \right)$. Stąd wyznaczamy współrzędne punktu $M = \left(\frac{d}{d^2+1}, \frac{1}{d^2+1} \right)$. Punkt N jest środkiem odcinka CD , więc $N = (2d, 1)$.

Możemy teraz obliczyć:

$$\begin{aligned} BN^2 &= (2d)^2 + (1-2)^2 = 4d^2 + 1, \\ BK^2 &= \left(\frac{2d}{d^2+1} \right)^2 + \left(\frac{2}{d^2+1} - 2 \right)^2 = \frac{4d^4 + 4d^2}{(d^2+1)^2}, \\ KM^2 &= \left(\frac{-d}{d^2+1} \right)^2 + \left(\frac{-1}{d^2+1} \right)^2 = \frac{d^2+1}{(d^2+1)^2}, \\ MN^2 &= \left(2d - \frac{d}{d^2+1} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{d^2+1} \right)^2 = \frac{4d^3 + 5d^4 + d^2}{(d^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} BK^2 + KM^2 + MN^2 &= \frac{4d^4 + 4d^2 + d^2 + 1 + 4d^6 + 5d^4 + d^2}{(d^2+1)^2} = \frac{4d^6 + 9d^4 + 6d^2 + 1}{d^4 + 2d^2 + 1} = \\ &= 4d^2 + 1 = BN^2. \end{aligned}$$

(tsz)