XV Śląski Konkurs Matematyczny
Szkice rozwiązań zadań — zawody finałowe 2018

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n>1$, dla których wyrażenie

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)$$

jest kwadratem liczby wymiernej.

Rozwiązanie

Przekształćmy wyrażenie

$$1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}=\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3}=\frac{n^2(n+1)-(n+1)}{n^3}=$$

$$=\frac{(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n+1)}{n\cdot n\cdot n}.$$

Wykorzystując otrzymaną równość możemy dane w zadaniu wyrażenie zapisać

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 3}\cdots\frac{(n-2)\cdot n\cdot n}{(n-1)\cdot(n-1)\cdot(n-1)}\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n+1)}{n\cdot n\cdot n}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\left(\frac{3\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot\cdot 3}\right)\cdot\left(\frac{4\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n\cdot n\cdot(n-1)}{(n-1)\cdot n\cdot n}\right)\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+1)}{n}=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4n}=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

Otrzymane wyrażenie będzie kwadratem liczby wymiernej tylko wtedy, gdy n będzie kwadratem liczby całkowitej. Jeśli $n=k^2$ dla $k>1$, to

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{k^2+1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{k^2}=\left(\frac{k^2+1}{2k}\right)^2,$$

a to jest kwadrat liczby wymiernej.

Zadanie 2.

Wyznacz liczbę czwórek (a,b,c,d) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$ab+bc+cd+da=2018.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że lewą stronę równania można zapisać następująco:

$$ab+bc+cd+da=b(a+c)+d(a+c)=(a+c)(b+d).$$

Ponieważ liczby a, b, c, d są dodatnimi liczbami całkowitymi, więc liczby $a+c$ oraz $b+d$ są liczbami całkowitymi większymi od 1. Zatem równanie

$$(a+c)(b+d)=2018$$

jest równoważne alternatywie układów równań

$$\begin{cases} a+c=2 \\ b+d=1009 \end{cases} \quad\text{lub}\quad \begin{cases} a+c=1009 \\ b+d=2, \end{cases}$$

bo liczby 2 i 1009 są liczbami pierwszymi.
Każdy z układów ma po $(2-1)\cdot(1009-1)=1008$ rozwiązań, a ponadto rozwiązania te nie pokrywają się. Zatem równanie

$$ab+bc+cd+da=2018$$

ma dokładnie 2016 rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

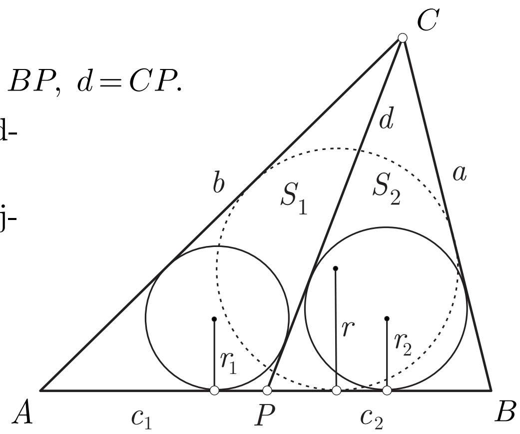
Zadanie 3. Punkt P $(A\neq P\neq B)$ leży na boku AB danego trójkąta ABC. Niech r, r_1, r_2 oznaczają promienie okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio ABC, APC, BPC. Wykaż, że

$$r<\frac{r_1+r_2}{2}+\max\{r_1,r_2\}.$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia (jak na rysunku):

$$a=BC,\ b=AC,\ c_1=AP,\ c_2=BP,\ d=CP.$$



Niech dodatkowo S_1, S_2 i S będą polami trójkątów odpowiednio APC, BPC i ABC.

Zauważmy, że z nierówności trójkąta zapisanych dla trójkątów APC i BPC wynikają oszacowania

$$b+d+c_1<b+c_1+c_2+a=a+b+c$$
$$a+d+c_2<a+c_1+c_2+b=a+b+c.$$

Korzystając ze wzoru

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

na pole trójkąta oraz powyższych oszacowań, dostajemy

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2S_1}{a+b+c}+\frac{2S_2}{a+b+c}<\frac{2S_1}{b+d+c_1}+\frac{2S_2}{a+d+c_2}=r_1+r_2.$$

Ponieważ

$$r_1+r_2\leqslant 2\max\{r_1,r_2\}\quad\text{czyli}\quad \frac{r_1+r_2}{2}\leqslant\max\{r_1,r_2\},$$

więc

$$r<r_1+r_2=\frac{r_1+r_2}{2}+\frac{r_1+r_2}{2}\leqslant\frac{r_1+r_2}{2}+\max\{r_1,r_2\}.$$

Zadanie 4.
Wyznacz wszystkie trójki (p,q,r) liczb pierwszych spełniające równanie

$$p+r\sqrt{p+q}+q=30.$$

Rozwiązanie

Zapiszmy dane równanie w postaci równoważnej

$$\sqrt{p+q}=\frac{30-(p+q)}{r}.$$

Wynika stąd, że liczba $\sqrt{p+q}$ jest liczbą wymierną. Wiadomo, że pierwiastek kwadratowy z liczby naturalnej jest liczbą naturalną lub niewymierną. Jeśli więc liczba $\sqrt{p+q}$ jest liczbą wymierną, to musi być liczbą naturalną i $\sqrt{p+q}\geqslant 2$.

Zapiszmy teraz dane równanie w postaci

$$\sqrt{p+q}\,(\sqrt{p+q}+r)=30. \tag{1}$$

Wiedząc, że $\sqrt{p+q}<\sqrt{p+q}+r$ i uwzględniając wcześniejsze uwagi stwierdzamy, że równanie (1) jest równoważne alternatywie trzech układów równań

$$1^\circ \begin{cases} \sqrt{p+q}=2 \\ \sqrt{p+q}+r=15, \end{cases} \quad 2^\circ \begin{cases} \sqrt{p+q}=3 \\ \sqrt{p+q}+r=10, \end{cases} \quad 3^\circ \begin{cases} \sqrt{p+q}=5 \\ \sqrt{p+q}+r=6. \end{cases}$$

Musimy więc rozwiązać powyższe układy w zbiorze liczb pierwszych.

1° Jeżeli $\sqrt{p+q}=2$, czyli $p+q=4$, to $r=15-2=13$. Ale w zbiorze liczb pierwszych równanie $p+q=4$ ma tylko jedno rozwiązanie $p=q=2$. Stąd rozwiązaniem układu jest trójka

$$(p,q,r)=(2,2,13).$$

2° Jeśli $\sqrt{p+q}=3$, to $p+q=9$ i w zbiorze liczb pierwszych równanie to ma dwa rozwiązania $(p,q)=(2,7)$ lub $(p,q)=(7,2)$.
Wtedy $r=10-3=7$. Zatem rozwiązaniami tego układu są trójki: $(p,q,r)=(2,7,7)$ oraz $(p,q,r)=(7,2,7)$.

3° Gdy natomiast $\sqrt{p+q}=5$, to $r=6-5=1$ i nie jest to liczba pierwsza. Zatem w tym przypadku nie istnieje rozwiązanie danego równania.
Ostatecznie równanie ma trzy rozwiązania

$$(p,q,r)\in\{(2,2,13),\ (2,7,7),\ (7,2,7)\}.$$

Zadanie 5.

Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wierzchołku A jest kątem ostrym. Na jego bokach AB, BC i CA wybrano odpowiednio takie punkty K, L i M, że

$$\sphericalangle BLK=\sphericalangle CLM=\sphericalangle BAC.$$

Odcinki BM i CK przecinają się w punkcie P. Wykaż, że punkty A, K, P i M leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że $\sphericalangle BAC=\sphericalangle BLK=\sphericalangle CLM=\alpha$ (zobacz rysunek na następnej stronie).
Ponieważ

$$\sphericalangle KLC=180^\circ-\alpha=180^\circ-\sphericalangle KAC,$$

więc na czworokącie $AKLC$ możemy opisać okrąg. Stąd dostajemy równość $\sphericalangle LCK=\sphericalangle LAK$ (kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku).
Mamy też

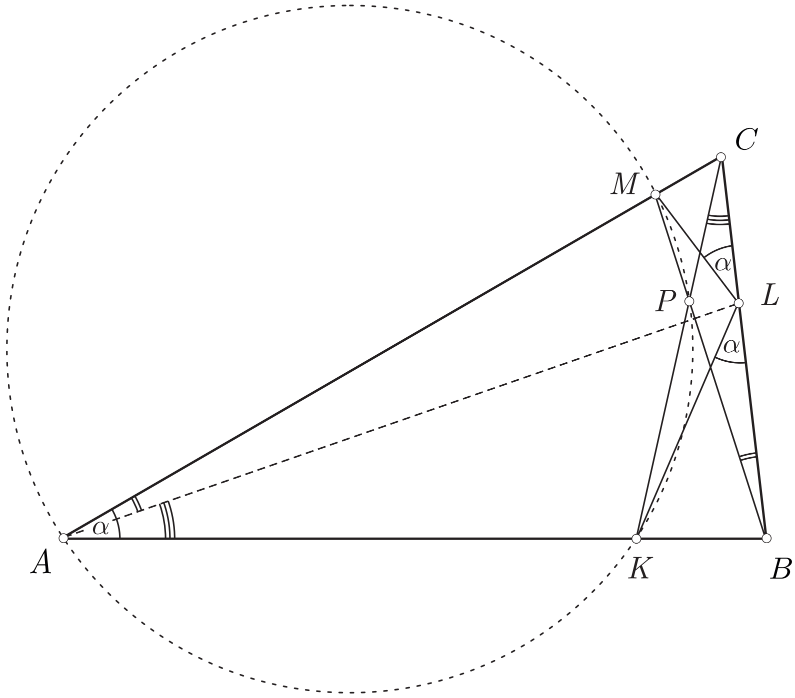
$$\sphericalangle MLB=180^\circ-\alpha=180^\circ-\sphericalangle MAB,$$

więc również na czworokącie $ABLM$ można opisać okrąg i stąd

$$\sphericalangle LBM=\sphericalangle LAM.$$

Wykorzystując powyższe równości, dostajemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle KPM=\sphericalangle BPC&=180^\circ-(\sphericalangle LBM+\sphericalangle LCK)=\\ &=180^\circ-(\sphericalangle LAM+\sphericalangle LAK)=180^\circ-\alpha,\end{aligned}$$



skąd otrzymujemy, że punkty A, K, P i M leżą na jednym okręgu, a to właśnie mieliśmy wykazać.

(tsz)