

XVI Śląski Konkurs Matematyczny

12 marca 2019 r.

zawody finałowe

czas: 120 minut

1. [6 pkt.] Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y^2 + 1 \\ y + \frac{1}{y} = x^2 + 1. \end{cases}$$

2. [6 pkt.] Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Pola trójkątów ABN i CDM są równe. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

3. [6 pkt.] Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $19p + 1$ jest sześcianiem pewnej liczby całkowitej.

Na stulecie Polskiego Towarzystwa Matematycznego 1919-2019

4. [6 pkt.] Liczby całkowite a, b, c spełniają równanie $a^2 + b^2 = c^2 + 1919^2$. Wykaż, że liczba $a + b + c$ jest liczbą nieparzystą.

5. [6 pkt.] Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} < 1.$$

Powodzenia!