XV Śląski Konkurs Matematyczny

16 marca 2018 r. | **zawody finałowe** | czas: 120 minut

1. [6 pkt.] Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n>1$, dla których wyrażenie

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)$$

jest kwadratem liczby wymiernej.

2. [6 pkt.] Wyznacz liczbę czwórek (a,b,c,d) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$ab+bc+cd+da=2018.$$

3. [6 pkt.] Punkt P $(A\neq P\neq B)$ leży na boku AB danego trójkąta ABC. Niech r, r_1, r_2 oznaczają promienie okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio ABC, APC, BPC. Wykaż, że

$$r<\frac{r_1+r_2}{2}+\max\{r_1,r_2\}.$$

4. [6 pkt.] Wyznacz wszystkie trójki (p,q,r) liczb pierwszych spełniające równanie

$$p+r\sqrt{p+q}+q=30.$$

5. [6 pkt.] Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wierzchołku A jest kątem ostrym. Na jego bokach AB, BC i CA wybrano odpowiednio takie punkty K, L i M, że

$$\sphericalangle BLK=\sphericalangle CLM=\sphericalangle BAC.$$

Odcinki BM i CK przecinają się w punkcie P. Wykaż, że punkty A, K, P i M leżą na jednym okręgu.

Powodzenia!