XIV Śląski Konkurs Matematyczny

23 marca 2017 r.	**zawody finałowe**	czas: 120 minut

1. [6 pkt.] Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=90$ i $AC=BC=50$. Punkty D, E, F są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z jego bokami. Oblicz obwód trójkąta DEF.

2. [6 pkt.] Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n, dla której istnieją takie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, należące do przedziału $(-1;1)$, że spełniona jest równość

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=2017+|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n|.$$

3. [6 pkt.] Wykaż, że spośród dowolnych siedmiu liczb całkowitych zawsze można wybrać takie cztery liczby, których suma jest podzielna przez 4.

4. [6 pkt.] Dana jest taka liczba naturalna $n>1$, dla której liczba $2^{2^n-1}-1$ jest liczbą pierwszą. Wykaż, że również liczba n jest liczbą pierwszą.

5. [6 pkt.] Dany jest taki sześciokąt $ABCDEF$, w którym spełnione są zależności:

$$AB \parallel DE, \quad BC \parallel EF, \quad CD \parallel FA \quad \text{oraz} \quad AD=BE=CF.$$

Wykaż, że na tym sześciokącie można opisać okrąg.

Powodzenia!