XIII Śląski Konkurs Matematyczny

4 marca 2016 r. **zawody finałowe** czas: 120 minut

1. (6 pkt.) Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, które dla każdej liczby rzeczywistej x spełniają równanie
$$xf(x)+f(1-x)=2.$$

2. (6 pkt.) Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb całkowitych, spełniające układ równań
$$\begin{cases} abc+ac+a+20=0 \\ abc+bc+b+18=0. \end{cases}$$

3. (6 pkt.) Dany jest odcinek AB o długości 8. Na odcinku tym wybrano taki punkt C, że $AC=3BC$. Odcinki AB, AC i BC są średnicami okręgów odpowiednio ω_1, ω_2 i ω_3. Okrąg ω jest styczny zewnętrznie do okręgów ω_2 i ω_3 oraz styczny wewnętrznie do okręgu ω_1. Oblicz promień okręgu ω.

4. (6 pkt.) Wykaż, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to prawdziwa jest nierówność
$$1+\left(1-\frac{a+b}{c}\right)\left(1-\frac{b+c}{a}\right)\left(1-\frac{c+a}{b}\right)\geqslant 0.$$

5. (6 pkt.) Na tablicy zapisano liczbę 252. Co minutę liczbę zapisaną na tablicy mnożymy lub dzielimy przez 2 lub przez 3, ale tak, aby wynik był liczbą całkowitą. Po wykonaniu działania wynik zapisywany jest na tablicy, a poprzednio zapisana liczba jest z tablicy ścierana. Rozstrzygnij, czy po upływie dokładnie jednej godziny na tablicy może pojawić się liczba 2016.

Powodzenia!