XII Śląski Konkurs Matematyczny

23 marca 2015 r. **zawody finałowe** czas: 120 minut

Zadanie 1. (6 pkt.)

Dane są takie liczby rzeczywiste x, y i z, że spełnione są równości

$$x+y=z+2015 \quad \text{i} \quad x^2+y^2=z^2+2015^2.$$

Wykaż, że liczby x, y i z spełniają też równość

$$x^3+y^3=z^3+2015^3.$$

Zadanie 2. (6 pkt.)

Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Pola trójkątów ABO, BCO, CDO i DAO są równe odpowiednio S_1, S_2, S_3 i S_4. Wykaż, że jeśli

$$\frac{S_1+S_3}{2}=\sqrt{S_2S_4},$$

to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Zadanie 3. (6 pkt.)

Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite a, b, c, spełniające równanie

$$a^4+b^4+444=c^4.$$

Zadanie 4. (6 pkt.)

Liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 są nieujemne, a ich suma jest równa 1. Wykaż, że spełniona jest nierówność

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2 \leqslant \frac{1}{27}.$$

Zadanie 5. (6 pkt.)

Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach B i C trójkąta ABC przecinają boki AC i AB w punktach odpowiednio B_1 i C_1. Środek okręgu opisanego na trójkącie C_1CB_1 leży na prostej AB. Wyznacz miarę kąta ABC.

Powodzenia!