

XVII Śląski Konkurs Matematyczny

10 września 2020 r.

zawody finałowe

czas: 10:00 – 12:00

1. [6 pkt.] Liczby a, b, c są takimi liczbami dodatnimi, że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$. Wykazać, że

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

2. [6 pkt.] Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych spełniających równanie

$$p^6 - 386 = q^3.$$

3. [6 pkt.] Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki:

$$f(-1) = 1$$

oraz

$$f(xy) = xf(y) + y^{2020}f(x) + y^{2020}x.$$

4. [6 pkt.] W każdą komórkę tabeli 5×8 wpisujemy jedną liczbę ze zbioru $\{1, 3\}$. Rozstrzygnąć, czy można je tak wpisać, aby suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie była liczbą podzielną przez 7.

5. [6 pkt.] Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt K jest rzutem prostokątnym punktu B na przekątną AC . Punkty M, N są środkami odcinków odpowiednio AK i CD . Wykazać, że

$$BN^2 = BK^2 + KM^2 + MN^2.$$

Powodzenia!

skm.katowice.pl



XVII edycja Śląskiego Konkursu Matematycznego
została dofinansowana przez Fundację mBanku