IX Śląski Konkurs Matematyczny

29 marca 2012 r. | zawody finałowe | czas: 120 minut

Zadanie 1. (5 pkt.)
Dany jest odcinek AB długości 4. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniach długości 4. Znajdź długość promienia okręgu stycznego do prostej AB i stycznego zewnętrznie do okręgu o środku A oraz stycznego wewnętrznie do okręgu o środku B.

Zadanie 2. (5 pkt.)
Udowodnij, że dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{2012^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+2012^2} \geqslant \sqrt{2}\,(a+b+2012).$$

Zadanie 3. (5 pkt.)
Dany jest taki sześciokąt $ABCDEF$ wpisany w okrąg, że

$$AB=BC, \quad CD=DE, \quad EF=FA.$$

Wykaż, że przekątne AD, BE, CF tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 4. (5 pkt.)
Wyznacz wszystkie trójki (x,y,z) liczb rzeczywistych spełniające układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=33 \\ x+3y+5z=34. \end{cases}$$

Zadanie 5. (5 pkt.)
Dane są dwie liczby pierwsze p i q. Wykaż, że jeżeli dla pewnych liczb naturalnych m i n takich, że $1<m<p$ i $1<n<q$ liczba $\dfrac{p}{m}+\dfrac{q}{n}$ jest liczbą całkowitą, to $m=n$.

Powodzenia!

skm.katowice.pl