VII Śląski Konkurs Matematyczny

8 kwietnia 2010 r. zawody finałowe czas: 10^{00} – 12^{00}

Zadanie 1.
Funkcja $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość

$$2 \cdot f(x) + f(1-x) = 3x.$$

Wyznaczyć $f(2010)$.

Zadanie 2.
Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n taką, aby liczby

$$n+3 \quad \text{i} \quad n-1000$$

były kwadratami liczb naturalnych.

Zadanie 3.
W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem przecięcia się przekątnych. Wiedząc, że pola trójkątów AOB i COD są odpowiednio równe p^2 i q^2, obliczyć pole tego trapezu.

Zadanie 4.
Wyznaczyć wszystkie całkowite liczby a, dla których równanie

$$x^2 + ax + a = 0$$

ma pierwiastki całkowite.

Zadanie 5.
Wyznaczyć trzy ostatnie cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby 2^{2010}. Odpowiedź uzasadnić.