

## VI Śląski Konkurs Matematyczny

26 marca 2009 r.

zawody finałowe

czas:  $10^{00} - 12^{00}$

### Zadanie 1.

Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby całkowite  $x$  i  $y$ , że zachodzi równość

$$x^3 + y^3 - 4 = 4xy(x + y).$$

### Zadanie 2.

Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ , w którym  $\sphericalangle ACB = 40^\circ$ . Punkty  $D$  i  $E$  są rzutami prostokątnymi punktów  $A$  i  $B$  odpowiednio na proste  $BC$  i  $AC$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AB$ . Wyznaczyć miary kątów wewnętrznych trójkąta  $EMD$ .

### Zadanie 3.

Liczby  $2^{2009}$  i  $5^{2009}$  zapisano w postaci dziesiętnej jedna za drugą tworząc jedną, nową liczbę. Ile cyfr ma ta liczba?

### Zadanie 4.

Trapez prostokątny o podstawach  $a$  oraz  $b$  opisany jest na okręgu o średnicy  $d$ . Wykazać, że zachodzi nierówność

$$d \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

### Zadanie 5.

Liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  należą do zbioru  $M = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30, 31\}$ . Zbadać, czy równanie

$$\sqrt[5]{ax^2} + \sqrt[5]{bx} + \sqrt[5]{c} = 0$$

ma rozwiązanie rzeczywiste?