IV Śląski Konkurs Matematyczny
zawody finałowe — marzec 2007

1. Rozwiąż równanie $x! + y! = z!$ w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych.

2. Pewiem człowiek udał się do banku, aby podjąć z konta x złotych i y groszy. Zamiast żądanej kwoty wypłacono mu jednak y złotych i x groszy. Po wydaniu jednej złotówki stwierdził, że ma jeszcze dwa razy więcej pieniędzy niż chciał podjąć z konta w banku. Jaką kwotę zamierzał ów człowiek podjąć z konta?

3. Rozstrzygnij, czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości: $\sqrt{2006}$, $\sqrt{2007}$, $\sqrt{2006}+\sqrt{2007}$. Odpowiedź uzasadnij.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC > AB$. Punkt M jest środkiem boku BC, a N — rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC. Wykaż, że $AC^2 - AB^2 = 2 \cdot MN \cdot BC$.

5. Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, p — połową jego obwodu, a r — długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geqslant \frac{1}{r^2}.$$