III Śląski Konkurs Matematyczny
zawody finałowe — marzec 2006

1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym styczne do tego okręgu w punktach B i D przecinają się na prostej AC. Wykaż, że

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

2. Rozstrzygnij, czy liczba

$$2005^{2003} + 2005^{2004} + 2005^{2005} + 2005^{2006}$$

jest podzielna przez 2006. Odpowiedź uzasadnij.

3. Wierzchołkami kwadratu $ABCD$ są punkty: $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (4,4)$, $D = (0,4)$. Dla każdej liczby rzeczywistej m rozważamy trójkąt o wierzchołkach: $P = (m,0)$, $R = (m+2,0)$, $S = (m,4)$. Niech $f(m)$ będzie polem figury, która jest częścią wspólną kwadratu $ABCD$ i trójkąta PRS. Wyznacz $f(m)$ w zależności od m i naszkicuj wykres funkcji f.

4. Niech p i q będą takimi liczbami pierwszymi, że $p \geqslant q > 3$. Wykaż, że liczba $p^2 - q^2$ jest podzielna przez 24.

5. Dany jest trójkąt ABC o polu równym 6. Punkty D, E, F są obrazami wierzchołków A, B, C w symetriach środkowych o środkach odpowiednio B, C, A. Oblicz pole trójkąta DEF.