# III Śląski Konkurs Matematyczny
## zawody finałowe — marzec 2006

**1.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym styczne do tego okręgu w punktach $B$ i $D$ przecinają się na prostej $AC$. Wykaż, że

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

**2.** Rozstrzygnij, czy liczba

$$2005^{2003} + 2005^{2004} + 2005^{2005} + 2005^{2006}$$

jest podzielna przez 2006. Odpowiedź uzasadnij.

**3.** Wierzchołkami kwadratu $ABCD$ są punkty: $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (4,4)$, $D = (0,4)$. Dla każdej liczby rzeczywistej $m$ rozważamy trójkąt o wierzchołkach: $P = (m,0)$, $R = (m+2,0)$, $S = (m,4)$. Niech $f(m)$ będzie polem figury, która jest częścią wspólną kwadratu $ABCD$ i trójkąta $PRS$. Wyznacz $f(m)$ w zależności od $m$ i naszkicuj wykres funkcji $f$.

**4.** Niech $p$ i $q$ będą takimi liczbami pierwszymi, że $p \geqslant q > 3$. Wykaż, że liczba $p^2 - q^2$ jest podzielna przez 24.

**5.** Dany jest trójkąt $ABC$ o polu równym 6. Punkty $D$, $E$, $F$ są obrazami wierzchołków $A$, $B$, $C$ w symetriach środkowych o środkach odpowiednio $B$, $C$, $A$. Oblicz pole trójkąta $DEF$.