

II Śląski Konkurs Matematyczny zawody finałowe — marzec 2005

1. Udowodnij, że jeśli a , b , c są długościami boków trójkąta, to prawdziwa jest nierówność

$$2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2.$$

2. Znajdź wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba $\left[\frac{n^2}{5} \right]$ jest liczbą pierwszą.

3. Prosta l przechodzi przez środek okręgu ω . Prosta k , styczna do okręgu ω w punkcie P , przecina prostą l w punkcie Q . Punkt S jest środkiem odcinka PQ . Wykaż, że prosta przechodząca przez punkt S i prostopadła do prostej l nie ma punktów wspólnych z okręgiem ω .

4. Dla jakich wartości parametru k równanie $||x| - 1| - 2k| = 4$ ma dokładnie 5 rozwiązań?