

X Śląski Konkurs Matematyczny

20 marca 2013 r.

zawody finałowe

czas: 120 minut

Zadanie 1. (5 pkt.)

Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna, która w zapisie dziesiętnym ma 1 jedynekę, 2 dwójki, 3 trójki, ..., 8 ósemek, 9 dziewiątek oraz pewną liczbę zer i która jest kwadratem liczby naturalnej. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2. (5 pkt.)

Rozwiąż równanie

$$x^{2012} + \frac{1}{x^{2012}} = 1 + x^{2013}.$$

Zadanie 3. (5 pkt.)

Dany jest zbiór $\{a, b, c, d\}$ takich czterech dodatnich liczb rzeczywistych, że każde trzy z nich są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} < 3.$$

Zadanie 4. (5 pkt.)

Dany jest trójkąt ABC , którego środkowe AA' , BB' , CC' przecinają się w punkcie O . W trójkąty AOC' , BOC' , BOA' , COA' , COB' , AOB' wpisano okręgi o promieniach odpowiednio równych $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$. Wykaż, że

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}.$$

Zadanie 5. (5 pkt.)

W okrąg o promieniu 1 wpisano taki czworokąt $ABCD$, że AD jest średnicą tego okręgu. Wykaż, że

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AB \cdot BC \cdot CD = 4.$$

Powodzenia!