Szkice rozwiązań zadań — zawody rejonowe 2018

Zadanie 1.

Dane są dodatnie liczby całkowite a i b, dla których liczba $\dfrac{a^3+b}{a+b}$ jest liczbą całkowitą. Wykaż, że również liczba $\dfrac{b^3+a}{b+a}$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\frac{a^3+b}{a+b}+\frac{b^3+a}{b+a}=\frac{a^3+b^3+a+b}{a+b}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a+b)}{a+b}=a^2-ab+b^2+1,$$

skąd

$$\frac{b^3+a}{b+a}=a^2-ab+b^2+1-\frac{a^3+b}{a+b}.$$

Skoro z założenia liczby a, b i $\dfrac{a^3+b}{a+b}$ są liczbami całkowitymi, więc również liczba $\dfrac{b^3+a}{b+a}$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których każda z liczb

$$p^2+2, \quad p^3+2, \quad p^4+2$$

jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

Dla $p=2$ wszytkie liczby są parzyste i większe od 2, więc są złożone.
Dla $p=3$ liczby te są odpowiednio równe 11, 29, 83 i wszystkie są liczbami pierwszymi.
Wykażemy, że dla liczb pierwszych $p>3$ nie wszystkie te liczby są jednocześnie liczbami pierwszymi. Jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to spełniona jest jedna z kongruencji

$$p\equiv 1 \pmod 3 \quad \text{lub} \quad p\equiv 2 \pmod 3.$$

Jeśli $p\equiv 1 \pmod 3$, to

$$p^2+2\equiv 0 \pmod 3, \quad p^3+2\equiv 0 \pmod 3, \quad p^4+2\equiv 0 \pmod 3,$$

stąd każda jest podzielna przez 3. Skoro też każda jest większa od 3, więc wszystkie są liczbami złożonymi.
Jeśli zaś $p\equiv 2 \pmod 3$, to

$$p^2+2\equiv 6\equiv 0 \pmod 3, \quad p^3+2\equiv 10\equiv 1 \pmod 3, \quad p^4+2\equiv 18\equiv 0 \pmod 3,$$

więc dwie spośród nich są podzielne przez 3 i jako większe od 3 są złożone.
Zatem tylko liczba $p=3$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 3.

Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0.$$

Wykaż, że

$$\frac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}.$$

Rozwiązanie

Z danej w zadaniu równości dostajemy $\sqrt[3]{c}=-\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$. Podnosząc tę równość obustronnie do potęgi trzeciej, otrzymujemy

$$c=\left(-\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\right)^3=-\left(a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b\right)=-a-b-3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$$

a stąd

$$a+b+c=-3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=-3\sqrt[3]{ab}\,(-\sqrt[3]{c})=3\sqrt[3]{abc},$$

czyli

$$\frac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}.$$

Zadanie 4.

Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości 1 i x. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi wierzchołków odpowiednio B i D na jego przekątną AC. Dla jakich wartości x punkty E i F dzielą przekątną AC na trzy równe części?

Rozwiązanie

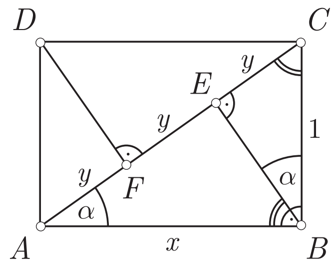
Zauważmy, że prostokąt ten nie może być kwadratem. Przyjmijmy zatem, że $AD<AB$. Rozpatrzymy dwa przypadki.

Przypadek 1.

$AB=CD=x>1$ (zobacz rysunek po prawej).

Wtedy $AD=BC=1$.

Przyjmimy: $AF=FE=EC=y$. Zauważmy, że trójkąty ABC, AEB i BEC mają takie same kąty, są więc trójkątami podobnymi. Stąd



$$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AC}$$

$$\frac{2y}{x}=\frac{x}{3y}$$

$$x^2=6y^2.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABC, otrzymujemy

$$AB^2+BC^2=AC^2,$$

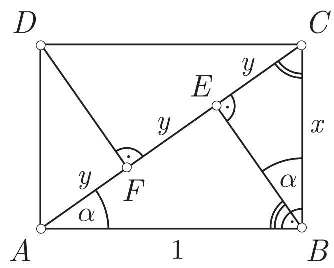
czyli $x^2+1=9y^2$. Wykorzystując związek $x^2=6y^2$, dostajemy $x^2+1=\frac{3}{2}x^2$, a stąd $x=\sqrt{2}$.

Przypadek 2.

$AD = BC = x < 1$ (zobacz rysunek po prawej).

Wtedy $AB = CD = 1$.

Przyjmimy, jak w przypadku 1: $AF = FE = EC = y$. Z podobieństwa trójkątów ABC, AEB i BEC dostajemy



$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{2y}{1} = \frac{1}{3y}$$

$$6y^2 = 1,$$

a stąd $y^2 = \frac{1}{6}$. Trójkąt ABC jest prostokątny, więc

$$AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

czyli

$$x^2 + 1 = 9y^2 = 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2}.$$

Zatem $x^2 = \frac{1}{2}$, skąd uzyskujemy $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Odpowiedź: istnieją dwie wartości x spełniające warunki zadania: $x = \sqrt{2}$ i $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zadanie 5.

Pewien bogacz z okazji 15-lecia pewnego konkursu matematycznego postanowił obdarować pieniędzmi tych jego uczestników, którzy uzyskają najlepsze wyniki. Przygotował do rozdania 2018 monet. Postawił jednak jeden warunek: każdy z obdarowanych ma otrzymać co najmniej jedną monetę oraz różne osoby mają otrzymać różne liczby monet. Jaka jest największa liczba uczestników konkursu, które może obdarować bogacz zgodnie z postawionym warunkiem?

Rozwiązanie

Aby bogacz mógł obdarować monetami jak największą liczbę uczestników konkursu, powinien dawać kolejnym osobom możliwie najmniejsze liczby monet. Niech pierwszej osobie da 1 monetę, drugiej 2 monety itd. Załóżmy, że bogacz rozdał monety n osobom. Szukamy więc największej liczby naturalnej n, dla której spełniona jest nierówność

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \leqslant 2018.$$

Korzystając ze wzoru na sumę liczb naturalnych od 1 do n, otrzymujemy do rozważenia nierówność

$$\frac{n(n+1)}{2} \leqslant 2018,$$

albo równoważnie

$$n(n+1) \leqslant 4036.$$

Ponieważ $63 \cdot 64 = 4032$ oraz $64 \cdot 65 = 4160$, więc bogacz mógł obdarować 63 uczestników konkursu i rozdałby wtedy 2016 monet. Pozostałe dwie monety można rozdzielić następująco:

dodać je temu, który otrzymał 63 monety, albo

dodać je temu, który otrzymał 62 monety, albo

dodać po jednej monecie tym dwóm, którzy uzyskali odpowiednio 62 oraz 63 monety.

Łatwo sprawdzić, że w każdym z tych trzech przypadków warunki zadania będą spełnione.

(tsz)