Szkice rozwiązań zadań — zawody rejonowe 2017

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$2^p + p^2$$

też jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

Jeżeli $p = 2$, to $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ i jest to liczba złożona.
Załóżmy więc, że liczba pierwsza p jest większa od 2. Jest to liczba nieparzysta. Przyjrzyjmy się liczbom postaci $2^p + p^2$ dla kolejnych liczb pierwszych, większych od 2.

p	2^p	p^2	$2^p + p^2$
3	8	9	17 — liczba pierwsza
5	32	25	$57 = 3 \cdot 19$
7	128	49	$177 = 3 \cdot 59$
11	2048	121	$2169 = 3 \cdot 723$
13	8192	169	$8361 = 3 \cdot 2787$

Przyglądając się otrzymanym liczbom $2^p + p^2$ możemy postawić hipotezę:

Hipoteza. Jeśli $p > 3$ jest liczbą pierwszą, to liczba $2^p + p^2$ jest liczbą złożoną, podzielną przez 3.
Aby wykazać prawdziwość tej hipotezy, posłużymy się językiem kongruencji.
Ponieważ $2 \equiv -1 \pmod 3$, więc

$$2^p \equiv (-1)^p = -1 \pmod 3,$$

bo p jest liczbą nieparzystą.
Jeśli $p \equiv 1 \pmod 3$, to $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Stąd

$$2^p + p^2 \equiv -1 + 1 = 0 \pmod 3,$$

więc jest to liczba podzielna przez 3. Skoro jest też większa od 3, więc jest liczbą złożoną.
Jeśli $p \equiv 2 \pmod 3$, to $p^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$. Zatem i w tym przypadku

$$2^p + p^2 \equiv -1 + 1 = 0 \pmod 3.$$

Kończy to dowód hipotezy.
Jeżeli natomiast $p = 3$, to, jak mogliśmy zauważyć wcześniej, liczba $2^3 + 3^2 = 17$ jest liczbą pierwszą. Zatem jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $p = 3$.

Zadanie 2.

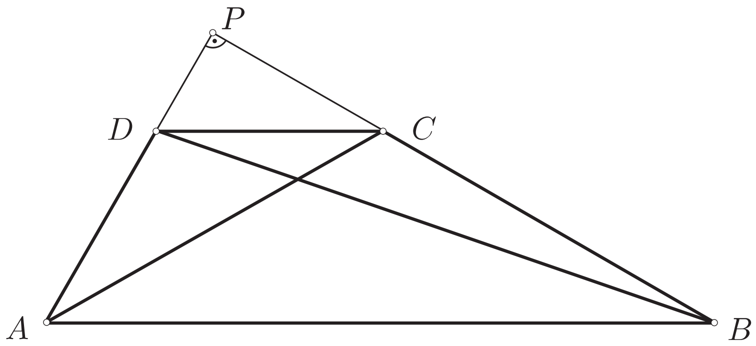
Dany jest taki trapez $ABCD$, że proste AD i BC są prostopadłe. Wykaż, że

$$AC^2+BD^2=AB^2+CD^2.$$

Rozwiązanie

Niech proste AD i BC przecinają się w punkcie P. Zatem trójkąty: CAP, CDP, BDP i BAP są prostokątne. Stosując do tych trójkątów twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

$$AC^2=AP^2+CP^2$$
$$CP^2=CD^2-DP^2$$
$$BD^2=BP^2+DP^2$$
$$BP^2=AB^2-AP^2.$$



Stąd

$$AC^2+BD^2=AP^2+CP^2+BP^2+DP^2=(AP^2+CD^2-DP^2)+(AB^2-AP^2+DP^2)=$$
$$=AB^2+CD^2.$$

Zadanie 3.

Rozstrzygnij, czy istnieje taki trójkąt o bokach długości a, b i c, że

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli $0<p<q$ i $x>0$, to

$$\frac{p}{q}-\frac{x+p}{x+q}=\frac{px+pq-qx-pq}{q(q+x)}=\frac{(p-q)x}{q(q+x)}<0,$$

a stąd

$$\frac{p}{q}<\frac{x+p}{x+q}.$$

Stosując otrzymaną nierówność do boków a, b, c trójkąta, dostajemy

$$\frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{a+b+c}=\frac{2a}{a+b+c}.$$

Analogicznie

$$\frac{b}{c+a}<\frac{2b}{a+b+c} \quad \text{oraz} \quad \frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}.$$

Dodając otrzymane nierówności stronami, otrzymujemy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Zatem nie istnieje trójkąt spełniający warunek podany w zadaniu.

Uwaga. Zobacz też rozwiązanie zadania nr 169 w książce: B. Mokrski, J. Siwy, T. Szymczyk, *Matematyczny sezam.*

Zadanie 4.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c należących do przedziału $(0;77\rangle$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{abc}{a+b+c}<2017.$$

Rozwiązanie

Liczby a, b, c są z założenia dodatnie, więc na podstawie nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb otrzymujemy

$$\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

Przekształcając tę nierówność równoważnie, dostajemy

$$abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$\frac{abc}{a+b+c}\leqslant\frac{(a+b+c)^2}{27}.$$

Ponieważ liczby a, b, c są nie większa od 77, więc

$$\frac{(a+b+c)^2}{27}\leqslant\frac{(3\cdot 77)^2}{27}=\frac{49\cdot 121}{3}<2017,$$

bo $49\cdot 121<3\cdot 2017$.
Ostatecznie

$$\frac{abc}{a+b+c}<2017.$$

Zadanie 5.

Każdą z liczb 1, 2, 3, ..., 32, 33 zapisano na oddzielnej kartce. Rozstrzygnij, czy jest możliwe takie rozłożenie tych kartek do jedenastu pudełek, po trzy kartki w pudełku, aby w każdym pudełku suma liczb na dwóch kartkach była równa liczbie na trzeciej kartce.

Rozwiązanie

Załóżmy, że udało się rozłożyć kartki zgodnie z warunkami zadania. Jeśli w pudełku znalazły się kartki z liczbami: a, b i c oraz $a+b=c$, to $a+b+c=c+c=2c$, czyli suma liczb w tym pudełku jest liczbą parzystą. Stąd w każdym pudełku suma liczb jest liczbą parzystą, a zatem suma wszystkich liczb jest liczbą parzystą.
Z drugiej strony

$$1+2+3+\cdots+32+33=\frac{33\cdot 34}{2}=33\cdot 17=561,$$

a to jest liczba nieparzysta. Wynika stąd wniosek, że rozłożenie kartek w pudełkach zgodnie z warunkami zadania nie jest możliwe.

(*tsz*)