Szkice rozwiązań zadań — zawody rejonowe 2016

Zadanie 1.

Joasia poszła do sklepu na zakupy. Kupiła trzy przedmioty i zapłaciła za nie 222 zł 22 gr. Patrząc na ceny zakupionych przedmiotów, Joasia zauważyła coś jeszcze — w cenie każdego zakupionego przedmiotu liczba złotych jest kwadratem liczby groszy. Oblicz, ile kosztował każdy z zakupionych przez Joasię przedmiotów, jeśli za jeden z nich zapłaciła 1 zł 1 gr.

Rozwiązanie

Sposób 1.

Ponieważ w każdej z poszukiwanych cen liczba złotych jest kwadratem liczby groszy oraz suma tych cen jest równa 221 zł 21 gr, więc możliwe są tylko następujące ceny tych towarów:

1 zł 1 gr,	4 zł 2 gr,	9 zł 3 gr,	16 zł 4 gr,	25 zł 5 gr,	36 zł 6 gr,
49 zł 7 gr,	64 zł 8 gr,	81 zł 9 gr,	100 zł 10 gr,	121 zł 11 gr,	144 zł 12 gr,
169 zł 13 gr,	196 zł 14 gr.				

Wybierając teraz dwie ceny, których suma groszy jest równa 21, otrzymujemy:

196 zł 14 gr + 49 zł 7 gr = 245 zł 21 gr,

169 zł 13 gr + 64 zł 8 gr = 233 zł 21 gr,

144 zł 12 gr + 81 zł 9 gr = 225 zł 21 gr,

121 zł 11 gr + 100 zł 10 gr = 221 zł 21 gr.

Jak widać tylko w jednym przypadku dostajemy sumę 221 zł 21 gr. Zatem poszukiwane ceny wyznaczone są jednoznacznie i wynoszą 121 zł 11 gr oraz 100 zł 10 gr.

Sposób 2.

Jeżeli za jeden z przedmiotów Joasia zapłaciła 1 zł 1 gr, to za dwa pozostałe musiała zapłacić 221 zł 21 gr. Niech w cenie jednego z tych przedmiotów liczba groszy będzie równa x, a w cenie drugiego y. Wtedy w tych cenach liczby złotych są równe odpowiednio x^2 i y^2, skąd dostajemy równanie

$$x^2+y^2+0,01(x+y)=221,21. \tag{1}$$

Największa liczba groszy, jaka może wystąpić przy dodawaniu dwóch cen jest równa 99+99=198, stąd $x+y=21$ lub $x+y=121$. Biorąc pod uwagę równanie (1), otrzymujemy możliwe układy równań:

$$A\colon \begin{cases} x^2+y^2=221 \\ x+y=21 \end{cases} \quad \text{lub} \quad B\colon \begin{cases} x^2+y^2=220 \\ x+y=121. \end{cases}$$

Rozwiążemy układ A. Z równania drugiego mamy $y=21-x$ i wstawiając to do równania pierwszego, dostajemy

$$\begin{aligned} x^2+(21-x)^2&=221 \\ x^2+441-42x+x^2&=221 \\ 2x^2-42x+220&=0 \\ x^2-21x+110&=0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $x_1=10$, $x_2=11$, a stąd $y_1=11$, $y_2=10$, czyli liczby groszy w poszukiwanych cenach są równe 10 oraz 11. Wtedy liczby złotych w tych cenach są równe 100 oraz 121, a stąd poszukiwane ceny wynoszą 100 zł 10 gr oraz 121 zł 11 gr i spełniają one warunki zadania. Rozwiązując analogicznie układ B stwierdzamy, że nie ma on rozwiązania. Zatem zadanie ma jedno rozwiązanie.

Sposób 3.

Przyjmijmy, jak w sposobie 2., że x jest liczbą groszy w jednej z poszukiwanych cen, a y — liczbą groszy w drugiej z tych cen. Suma tych cen (w złotych) jest równa

$$x^2+0,01x+y^2+0,01y=221,21. \tag{1}$$

Równanie (1) możemy zapisać równoważnie w postaci

$$(x+0,005)^2+(y+0,005)^2=221,2101. \tag{2}$$

Równanie (2) przedstawia na płaszczyźnie okrąg o środku $S=(-0,005;-0,005)$ i promieniu $r=\sqrt{221,2101}\approx 14,87$. Równanie (1), po pomnożeniu obustronnie przez 100, możemy zapisać w postaci

$$100x^2+100y^2+x+y=22121.$$

Wnioskujemy stąd, że cyfrą jedności liczby $x+y$ jest 1. Szukamy więc takich punktów (x,y) o obu współrzędnych będących dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których cyfrą jedności sumy $x+y$ jest 1 oraz spełniają one równanie (2). Przyjmijmy, że $x\geqslant y$. Wystarczy więc sprawdzić, które z par liczb: (14,7), (13,8), (12,9), (11,10) spełniają równanie (2). Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że tylko para (11,10) spełnia równanie (2), stąd poszukiwanymi cenami są 121 zł 11 gr oraz 100 zł 10 gr.

Zadanie 2.

Funkcja f, określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, spełnia warunki:

1° $f(0)=2016$,

2° $f(x+2)=\dfrac{f(x)}{5f(x)-1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznacz $f(2016)$.

Rozwiązanie

Wstawiając $x+2$ w miejsce x oraz wykorzystując warunek 2°, otrzymujemy

$$f((x+2)+2)=\frac{f(x+2)}{5f(x+2)-1}=\frac{\dfrac{f(x)}{5f(x)-1}}{5\cdot\dfrac{f(x)}{5f(x)-1}-1}=\frac{\dfrac{f(x)}{5f(x)-1}}{\dfrac{5f(x)-5f(x)+1}{5f(x)-1}}=f(x),$$

czyli $f(x+4)=f(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Oznacza to, że funkcja f jest okresowa o okresie $t=4$ (nie wiadomo, czy jest to okres zasadniczy tej funkcji!). Stąd dla każdej liczby całkowitej k oraz dowolnej liczby rzeczywistej x_0 zachodzi równość

$$f(x_0+4k)=f(x_0).$$

W szczególności

$$f(2016)=f(0+4\cdot 504)=f(0)=2016.$$

Zadanie 3.

Rozstrzygnij, czy wierzchołki ośmiokąta foremnego można tak ponumerować liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, aby dla dowolnych trzech jego kolejnych wierzchołków suma ich numerów była większa od 13.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli suma $x+y+z$ liczb całkowitych jest większa od 13, to $x+y+z \geqslant 14$. Załóżmy, że takie ponumerowanie jest możliwe i kolejnym wierzchołkom przyporządkujmy odpowiednio liczby a_1, a_2, …, a_8. Jeśli spełnione są warunki zadania, to prawdziwe są zależności

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3 &\geqslant 14 \\ a_2+a_3+a_4 &\geqslant 14 \\ &\dots \\ a_8+a_1+a_2 &\geqslant 14. \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe nierówności, otrzymujemy

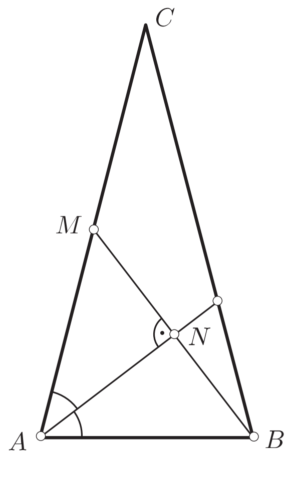
$$\begin{aligned} 3\cdot(a_1+a_2+a_3+\dots+a_8) &\geqslant 8\cdot 14 \\ 3\cdot(1+2+3+\dots+8) &\geqslant 8\cdot 14 \\ 108 &\geqslant 112. \end{aligned}$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że takie ponumerowanie nie jest możliwe.

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=1$. Wiadomo, że dwusieczna kąta przy wierzchołku A jest prostopadła do środkowej poprowadzonej z wierzchołka B oraz dwusieczna kąta przy wierzchołku B jest prostopadła do środkowej poprowadzonej z wierzchołka A. Oblicz obwód trójkąta ABC.

Rozwiązanie



Niech M będzie środkiem boku AC w trójkącie ABC, a dwusieczna przy wierzchołku A tego trójkąta przecina środkową BM w punkcie N. Ponieważ

$$\sphericalangle BAN = \sphericalangle MAN \quad \text{oraz} \quad AN \perp BM,$$

więc w trójkącie ABM odcinek AN jest jednocześnie dwusieczną kąta BAM i wysokością poprowadzoną z wierzchołka A. Stąd trójkąt ABM jest równoramienny, w którym $AB=AM=1$. A ponieważ M jest środkiem boku AC, więc

$$AC = 2\cdot AM = 2.$$

Analogicznie wykazujemy, że $BC=2$. Zatem

$$\text{Obw.}_{\Delta ABC} = AB+AC+BC = 1+2+2 = 5.$$

Uwaga. Można zauważyć, że trójkąty ABN i AMN są przystające (cecha kąt-bok-kąt), więc

$$AB = AM = \frac{AC}{2} = 1,$$

a stąd $AC=2$.

Zadanie 5.

W trójkącie ABC o polu S długości a i b boków odpowiednio BC i AC są liczbami całkowitymi. Wykaż, że jeśli

$$\frac{1}{8}(a+b+1)(a+b-1) < S,$$

to trójkąt ABC jest równoramienny.

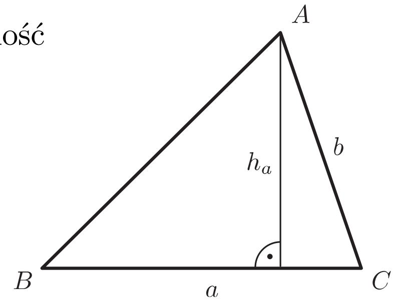
Rozwiązanie

Nierówność daną w zadaniu możemy zapisać w postaci równoważnej

(1) $$(a+b)^2 < 8S+1.$$

Zauważmy też, że pole S danego trójkąta ABC spełnia nierówność

(2) $$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a \leqslant \frac{1}{2}ab.$$



Na podstawie (1) i (2) mamy

$$(a+b)^2 < 8S+1 \leqslant 4ab+1,$$

a stąd

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &< 4ab+1 \\ a^2-2ab+b^2 &< 1 \\ (a-b)^2 &< 1. \end{aligned}$$

Liczby a, b z założenia są liczbami całkowitymi, więc liczba $(a-b)^2$ jest nieujemną liczbą całkowitą. Jedyną taką liczbą mniejszą od 1 jest liczba 0, więc $(a-b)^2=0$, a stąd $a=b$, co oznacza, że trójkąt ABC jest równoramienny.

, (*tsz*)