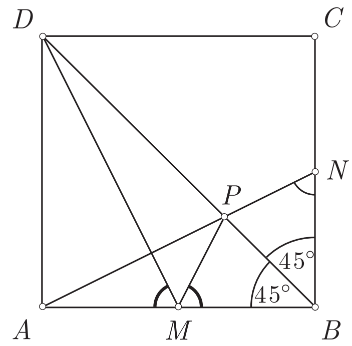
Szkice rozwiązań zadań — zawody rejonowe 2015

Zadanie 1. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkty M i N są środkami boków odpowiednio AB i BC. Odcinek AN przecina przekątną BD w punkcie P. Wykaż, że $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMP$.

Rozwiązanie

W trójkątach prostokątnych AMD i BNA (zobacz rysunek obok) mamy

$$AD = AB, \quad AM = BN,$$



więc są to trójkąty przystające, zatem

(1) $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BNA = \sphericalangle BNP.$

Zauważmy, że

$$BM = BN \quad \text{i} \quad \sphericalangle MBP = \sphericalangle NBP = 45°,$$

więc również trójkąty MBP i NBP są przystające, skąd

(2) $\sphericalangle BMP = \sphericalangle BNP.$

Na podstawie (1) i (2) otrzymujemy

$$\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMP,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie w zbiorze liczb całkowitych

$$\frac{x^2}{3} + \frac{5}{y} = 8.$$

Rozwiązanie

Zakładamy, że $y \neq 0$. Równanie możemy zapisać równoważnie w postaci

$$x^2 y + 15 = 24y,$$

lub

$$y(x^2 - 24) = -15.$$

Stąd

$$y = -\frac{15}{x^2 - 24}.$$

Zauważmy, że nie ma liczby całkowitej x, dla której $x^2 - 24 = 0$. Liczba $x^2 - 24$ jest dzielnikiem liczby 15, więc

$$x^2 - 24 \in \{-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15\},$$

albo równoważnie

$$x^2 \in \{9, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 39\}.$$

Zatem $x^2 = 9$ lub $x^2 = 25$, czyli

$$x = 3 \quad \text{lub} \quad x = -3, \quad \text{lub} \quad x = 5, \quad \text{lub} \quad x = -5.$$

Jeśli $x^2 = 9$, to $y = 1$, a jeśli $x^2 = 25$, to $y = -15$. Ostatecznie rozwiązaniami danego równania są pary

$$(x, y) \in \{(3, 1), (-3, 1), (5, -15), (-5, -15)\}.$$

Zadanie 3. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Rozwiązanie

Funkcja f jest określona dla takich wartości x, dla których

$$1-x^4>0 \quad \text{oraz} \quad 1+x^4>0.$$

Nierówności te zachodzą równocześnie dla $x\in(-1;1)$.

W rozwiązaniu skorzystamy z nierówności $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$ prawdziwej dla liczb dodatnich, która jest równoważna znanej nierówności $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

Na podstawie powyższej nierówności otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\geqslant\frac{2}{\sqrt{\sqrt[4]{1-x^4}\cdot\sqrt[4]{1+x^4}}}=\frac{2}{\sqrt[8]{1-x^8}}. \tag{1}$$

Zauważmy, że $0<1-x^8\leqslant 1$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x z przedziału $(-1;1)$. Ponieważ funkcja $g(t)=\sqrt[8]{t}$ jest funkcją rosnącą, więc prawdziwe są nierówności $0<\sqrt[8]{1-x^8}\leqslant 1$, skąd dostajemy

$$\frac{1}{\sqrt[8]{1-x^8}}\geqslant 1.$$

Łącząc ten fakt z nierównością (1), uzyskujemy

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\geqslant\frac{2}{\sqrt[8]{1-x^8}}\geqslant 2.$$

Wykazaliśmy tym samym, że wartości funkcji f są nie mniejsze niż 2. Ponieważ $f(0)=2$, więc najmniejszą wartością funkcji f jest liczba 2.

Zadanie 4. Trójmian kwadratowy $P(x)=ax^2+bx+2015$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi różnymi od zera, ma dwa pierwiastki całkowite. Wykaż, że $P(2015)$ jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie

Skoro trójmian ten ma dwa pierwiastki całkowite (oznaczmy je x_1, x_2), więc na podstawie wzorów Viete'a otrzymujemy

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{2015}{a},$$

albo równoważnie

$$b=-a(x_1+x_2) \quad \text{i} \quad ax_1x_2=2015.$$

Zauważmy, że jeśli iloczyn liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą, to każda z tych liczb musi być liczbą nieparzystą. Zatem liczby: a, x_1. x_2 są liczbami nieparzystymi. W konsekwencji liczba x_1+x_2 jest liczbą parzystą. Wynika stąd, że liczba $b=-a(x_1+x_2)$ jest liczbą parzystą. Korzystając z tych faktów, otrzymujemy, że

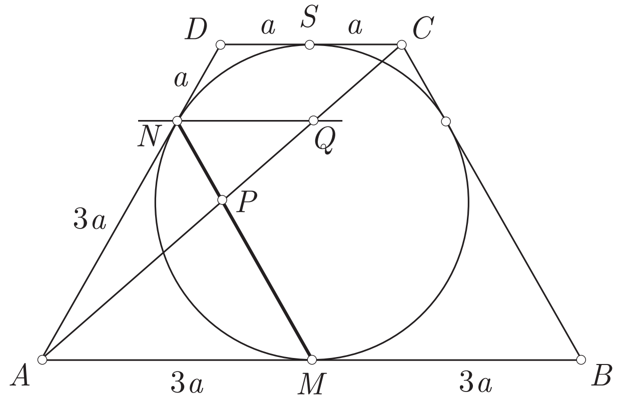
$$P(2015)=a\cdot 2015^2+b\cdot 2015+2015$$

jako suma dwóch liczb nieparzystych i jednej parzystej jest liczbą parzystą.

Zadanie 5. Trapez równoramienny $ABCD$ ($AB \parallel CD$), w którym $AB = 3CD$ jest opisany na okręgu. Punkty M i N są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z bokami AB i AD. Odcinek MN przecina przekątną AC tego trapezu w punkcie P. Wykaż, że $\frac{PM}{PN} = 2$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy: $AB = 6a$ i $CD = 2a$. Z uwagi na to, że trapez jest równoramienny, punkty styczności jego podstaw z okręgiem w niego wpisanym są środkami tych podstaw, czyli $AM = 3a$ i $DS = a$. Jednocześnie z własności stycznych do okręgu mamy $AN = AM = 3a$ i $DN = DS = a$.



Poprowadźmy teraz prostą równoległą do podstaw trapezu przechodzącą przez punkt N i niech ta prosta przecina przekątną AC w punkcie Q. Zauważmy, że trójkąty ANQ i ADC są podobne, skąd

$$\frac{NQ}{DC} = \frac{AN}{AD} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4},$$

a stąd

$$NQ = \frac{3}{4}DC = \frac{3}{4} \cdot 2a = \frac{3}{2}a.$$

Również trójkąty AMP i QNP są podobne, więc

$$\frac{PM}{PN} = \frac{AM}{QN} = \frac{3a}{\frac{3}{2}a} = 2,$$

a to właśnie mieliśmy wykazać.

(*tsz*)